Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Obtener el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t^2\ln\left(1+4t^2\right)dt}{x^5}$$

Aplicación del teorema fundamental del cálculo integral: "Si $f(x)$ *es continua en* $[a,b]$ *entonces la función* $A(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ *es derivable en* $[a,b]$ *y* $A'(x)=f(x)$ *para todo* $x\in[a,b]$*"*

Como es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$*, estamos en las condiciones del teorema de L´Hôpital*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t^2\ln\left(1+4t^2\right)dt}{x^5}\triangleq\lim_{x\to 0}\frac{x^2\ln\left(1+4x^2\right)}{5x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+4x^2\right)}{5x^2}\triangleq\lim_{x\to 0}\frac{\frac{8x}{1+4x^2}}{10x}=\lim_{x\to 0}\frac{8}{10\left(1+4x^2\right)}=\frac{4}{5}$$

$\triangleq$(*indica que aplicamos la regla de L' Hôpital*)

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula las integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int\frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x}dx$

Es una integral racional, factorizamos el denominador y separamos en fracciones simples

$$\frac{x^2+5}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+A}{x(x-1)^2}$$

$$\begin{cases}A+B=1\\-2A-B+C=0\\A=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=5\\B=-4\\C=6\end{cases}$$

$$\int\frac{x^2+5}{x(x-1)^2}dx=\int\frac{5}{x}dx+\int\frac{-4}{x-1}dx+\int\frac{6}{(x-1)^2}dx=5\int\frac{1}{x}dx-4\int\frac{1}{x-1}dx+6\int(x-1)^{-2}dx=5\ln|x|-4\ln|x-1|-\frac{6}{x-1}+c$$

b) $\displaystyle\int \frac{sen3x}{e^x}dx = \int e^{-x}\cdot sen3x\cdot dx$ $\quad$ (*aplicamos la integración por partes*)

$$u = sen3x \Rightarrow du = 3cos3x\,dx \quad / \quad dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$$

$$\int e^{-x}sen3x\,dx = -e^{-x}sen3x - \int -e^{-x}3cos3x\,dx = -e^{-x}sen3x + 3\int e^{-x}cos3x\,dx = (*)$$

$$u = cos3x \Rightarrow du = -3sen3x\,dx \quad / \quad dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$$

$$(*) = -e^{-x}sen3x + 3\left[-e^{-x}cos3x - \int e^{-x}3sen3x\,dx\right] \Rightarrow$$

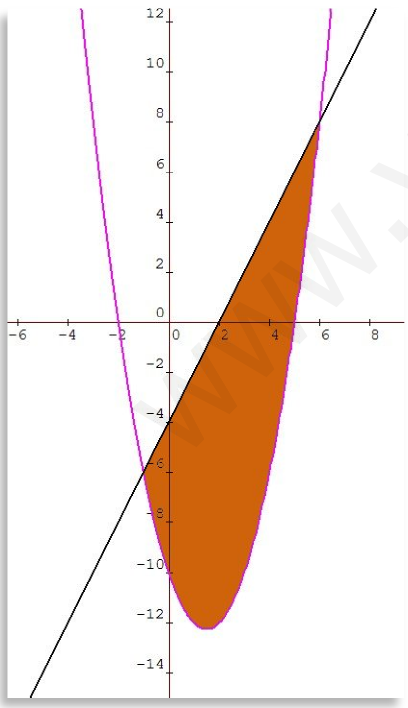
$$\int e^{-x}sen3x\,dx = -e^{-x}sen3x - 3e^{-x}cos3x - 9\int e^{-x}sen3x\,dx \Rightarrow 10\int e^{-x}sen3x\,dx = -e^{-x}sen3x - 3e^{-x}cos3x$$

$$\int e^{-x}sen3x\,dx = \frac{-e^{-x}\left(sen3x + 3cos3x\right)}{10} + c$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 3x - 10$, $y = 2x - 4$.

Representamos las funciones para visualizar el área pedida



Calculamos los puntos de corte entre las curvas

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x - 10 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 2x - 4 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$A = \int_{-1}^{6}\left[(2x-4) - (x^2 - 3x - 10)\right]dx = \int_{-1}^{6}\left(-x^2 + 5x + 6\right)dx =$$

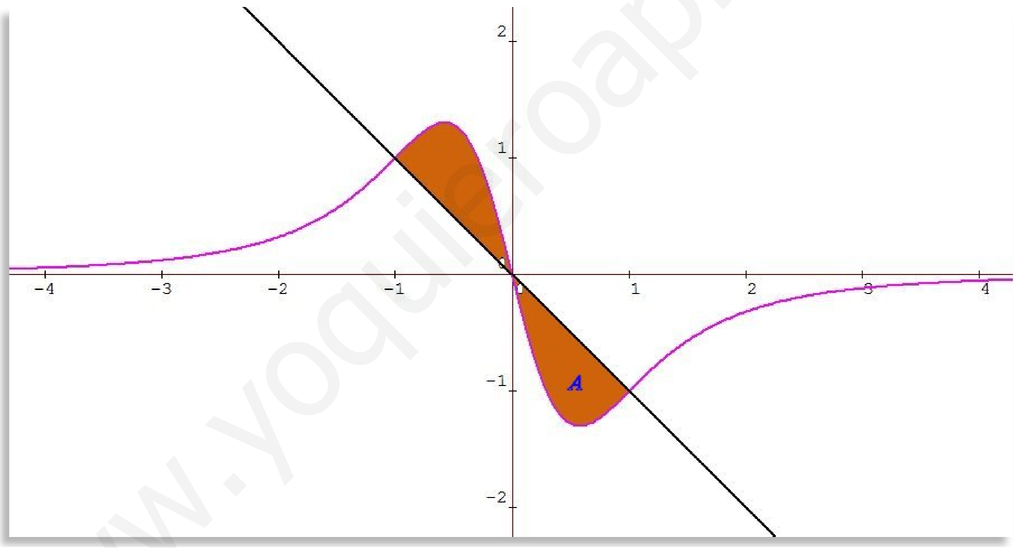
$$= \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 6x\right]_{-1}^{6} == \left[\left(\frac{-216}{3} + \frac{180}{2} + 36\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 6\right)\right] =$$

$$= 60 - \frac{1}{3} - \frac{5}{2} = \frac{343}{6}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Determina el área comprendida entre la curvas $f(x)=\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$ y $g(x)=-x$. Dibuja la situación representando para ello las funciones dadas.

La función $f(x)$ *tiene dominio todos los números reales, corta a los ejes en el origen de coordenadas, así mismo es simétrica puesto que* $f(-x)=-f(x)$, *tiene una asíntota horizontal en la recta* $y=0$ *puesto que* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}\triangleq\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4}{2(1+x^2)2x}=0$. *Derivando obtenemos que* $f'(x)=\dfrac{12x^2-4}{(1+x^2)^3}$, *vemos que* $f'(x)=0$ *en los puntos* $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ *y* $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. *Derivamos otra vez* $f''(x)=\dfrac{48x-48x^3}{(1+x^2)^4}$ *y deducimos que en* $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ *hay un mínimo ya que* $f''\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)>0$, *del mismo modo en* $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ *hay un máximo; además como* $f''(x)=0$ *en* $x=0$, $x=1$, $x=-1$, *hay 3 puntos de inflexión.*



El área pedida será igual a $2A$, *para calcularla debemos encontrar los puntos de corte de las dos funciones.*

$$-x=\frac{-4x}{(1+x^2)^2}\ \Rightarrow\ x(1+x^2)^2=4x\Rightarrow x\left[(1+x^2)^2-4\right]=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\1+x^2=2\Rightarrow x=\pm1\\\cancel{1+x^2=-2}\end{cases}$$

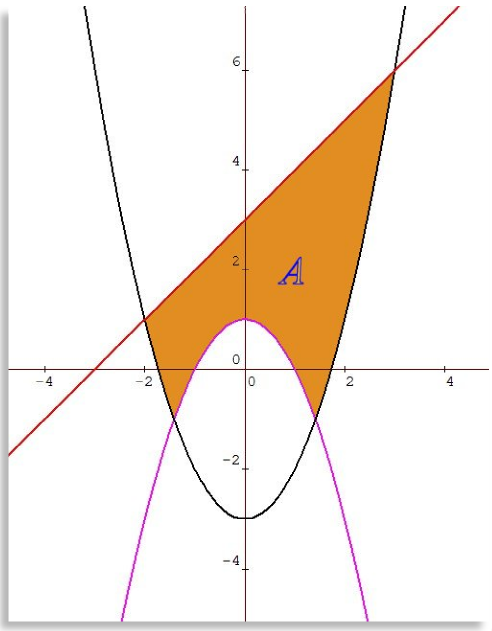
$$A=\int_0^1\left(-x-\frac{-4x}{(1+x^2)^2}\right)dx=-\int_0^1 x\,dx+2\int_0^1(1+x^2)^{-2}\,2x\,dx=-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+2\left[\frac{-1}{(1+x^2)}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

Entonces el área pedida es $2A=1$

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Determina el área del recinto plano limitado por las gráficas de las ***tres funciones*** siguientes:
$y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 3$, $y = x + 3$.



Representamos las funciones para tener una idea clara de la región de la que debemos calcular el área.

Calculamos los puntos de corte entre las curvas:

$$\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = x^2 - 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3 = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = x^2 - 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3 = x + 3 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

entonces el área pedida es:

$$A = \int_{-2}^{-1/\sqrt{2}} \left[(x+3) - (x^2 - 3)\right] dx + \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \left[(x+3) - (1 - x^2)\right] dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{3} \left[(x+3) - (x^2 - 3)\right] dx =$$

$$= \int_{-2}^{-1/\sqrt{2}} \left(-x^2 + x + 6\right) dx + \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \left(x^2 + x + 2\right) dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{3} \left(-x^2 + x + 6\right) dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-2}^{-1/\sqrt{2}} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{1/\sqrt{2}}^{3} = \frac{125 - 22\sqrt{2}}{6}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la función $f(x) = x \cdot e^{3x}$. Esboza la gráfica de la curva $y = f(x)$ y calcula un número $p > 0$ para que el área limitada por la curva y el eje de abscisas ente $x = 0$ y $x = p$ sea $\frac{1}{9}$.

La función $f(x)$ tiene dominio todos los números reales, corta a los ejes en el origen de coordenadas, no es simétrica y tampoco tiene asíntotas verticales ni oblicuas, sin embargo $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x \cdot e^{3x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-3x}} \stackrel{\wedge}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-3e^{-3x}} = \frac{1}{-3e^{\infty}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

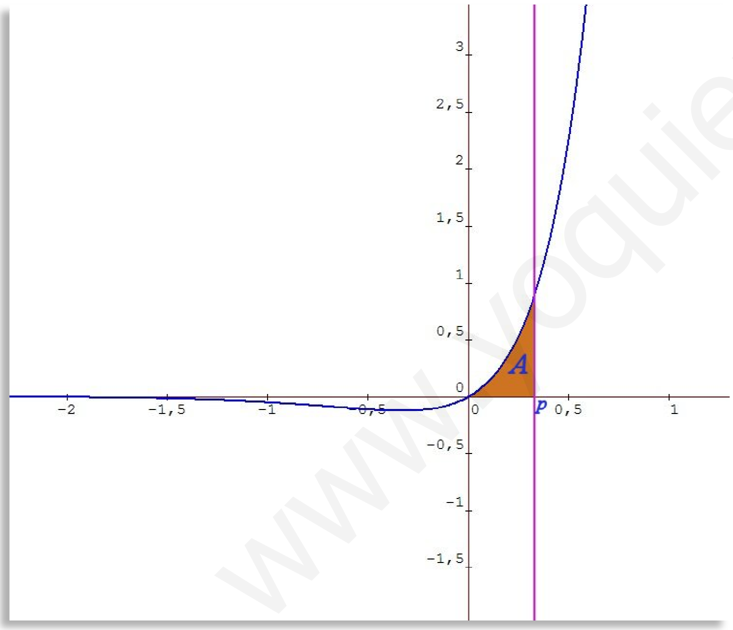
Derivamos e igualamos a cero para buscar los extremos de la función

$$f'(x) = e^{3x} + 3x \cdot e^{3x} \Rightarrow f'(x) = e^{3x}(3x+1) \ ; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow e^{3x}(3x+1) = 0 \Rightarrow (3x+1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$f''(x) = 3e^{3x}(3x+1) + 3e^{3x} \Rightarrow f''(x) = 3e^{3x}(3x+2) \ ; \quad f''\left(\frac{1}{3}\right) > 0 \Rightarrow en \ x = \frac{1}{3} \ \text{hay un mínimo.}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 3e^{3x}(3x+2) = 0 \Rightarrow (3x+2) = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \ \text{hay un punto de inflexión.}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 3x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{3}; \quad en \ \left(-\frac{1}{3}, \infty\right) \ f(x) \ crece \ y \ en \ \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \ decrece.$$



$$A = \frac{1}{9} \quad \text{, pero también} \quad A = \int_0^p x \cdot e^{3x} dx$$

Aplicamos la fórmula de integración por partes para calcular una primitiva de $f(x)$

$$\int x \cdot e^{3x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \dfrac{e^{3x}}{3} \end{array} \right\} =$$

$$= x \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} dx = x \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9}$$

$$\int_0^p x \cdot e^{3x} dx = \left[\frac{e^{3x}(3x-1)}{9} \right]_0^p = \frac{e^{3p}(3p-1)}{9} - \left(-\frac{1}{9}\right)$$

Igualando la integral definida al valor del área obtenemos p

$$\frac{e^{3p}(3p-1)}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{e^{3p}(3p-1)}{9} = 0 \Rightarrow 3p - 1 = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

De la función $f(x)$ se sabe que pasa por el origen de coordenadas y que su derivada es la función $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$. Encontrar la expresión de $f(x)$.

$f(x)$ será una primitiva de $f'(x)$ y además cumple que $f(0)=0$.

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx=\int \frac{1}{1+t}\cdot\frac{dt}{t}=\int \frac{1}{t(t+1)}=\int \frac{1}{t}dt-\int \frac{1}{t+1}dt=\ln|t|-\ln|t+1|=\ln e^x-\ln\left(e^x+1\right)=x-\ln\left(e^x+1\right)$$

$$cambio\ e^x=t\Rightarrow e^x dx=dt\Rightarrow dx=\frac{dt}{e^x}\Rightarrow dx=\frac{dt}{t}$$

$$\frac{1}{t(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}=\frac{A(t+1)+Bt}{t(t+1)}=\frac{(A+B)t+A}{t(t+1)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\Rightarrow B=-1\\ A=1\end{cases}$$

$$f(x)=x-\ln\left(e^x+1\right)+c,\ pero\ f(0)=0\Rightarrow 0-\ln 2+c=0\Rightarrow c=\ln 2\Rightarrow f(x)=x-\ln\left(1+e^x\right)+\ln 2$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula las integrales:

$$a)\ \int \frac{sen\,x}{5-2\cos x}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2sen\,x}{5-2\cos x}dx=\frac{1}{2}\ln(5-2\cos x)+c$$

$$b)\ \int \frac{3x-8}{x^3+4x}dx=\int \frac{3x-8}{x\left(x^2+4\right)}=\int \frac{-2}{x}dx+\int \frac{2x+3}{x^2+4}dx=-2\int \frac{1}{x}dx+\int \frac{2x}{x^2+4}dx+3\int \frac{1}{4+x^2}dx\quad (*)$$

$$\frac{3x-8}{x\left(x^2+4\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+4}=\frac{Ax^2+4A+Mx^2+Nx}{x\left(x^2+4\right)}=\frac{(A+M)x^2+Nx+4A}{x\left(x^2+4\right)}\Rightarrow\begin{cases}A+M=0\Rightarrow M=2\\ N=3\\ 4A=-8\Rightarrow A=-2\end{cases}$$

$$(*)\ \int \frac{1}{4+x^2}dx=\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}dx=\frac{1}{4}\int \frac{1/2}{1+\left(x/2\right)^2}dx=\frac{1}{4}arctg\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\int \frac{3x-8}{x^3+4x}dx=-2\ln|x|+\ln\left(x^2+4\right)+\frac{3}{4}arctg\left(\frac{x}{2}\right)+c$$