Problema 1 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 4ax^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ ax^2 + 2bx - 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Hallar a y b de manera que f cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Encontrar aquellos puntos que el teorema asegura su existencia.

Solución:

1. f es continua en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la continuidad en $x = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (4ax^2 - bx + 1) = 4a - b + 1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (ax^2 + 2bx - 2) = a + 2b - 2 \end{array} \right. \Longrightarrow a - b = -1$$

2. f es derivable en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la derivabilidad en $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 8ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ 2ax + 2b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(1^-) = 8a - b \\ f'(1^+) = 2a + 2b \end{array} \right. \Longrightarrow 2a - b = 0$$

3. $$\left\{ \begin{array}{l} a - b = -1 \\ 2a - b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \end{array} \right.$$

4. Tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 2x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 + 4x - 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 8x - 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x + 4 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en el $(0, 2)$. El Teorema afirma que existe al menos un punto $c \in (0, 2)$ que cumple

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{9}{2}.$$

Si cogemos la primera rama $c < 1$:

$$f'(c) = 8c - 2 = 9/2 \Longrightarrow c = 13/16 \text{ si vale}$$

Si cogemos la segunda rama $c \geq 1$:

$$f'(c) = 2c + 4 = 9/2 \Longrightarrow c = 1/4 \text{ no vale}$$

El punto $c \in (0, 2)$ al que hace referencia el teorema es $c = 13/16$.

Problema 2 Hallar una función polinómica de tercer grado tal que pasa por el punto $(0, 3)$, tenga un extremo relativo en $x = -1$ y un punto de inflexión en $(1, 2)$

Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

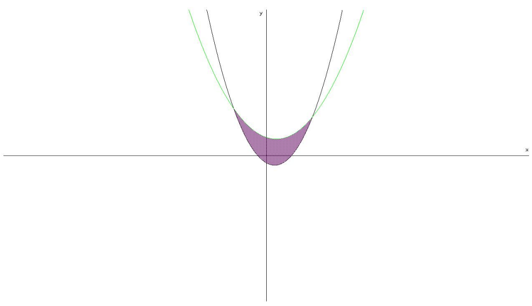
$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 3 \Longrightarrow d = 3 \\ f(1) = 2 \Longrightarrow a + b + c + d = 2 \\ f'(-1) = 0 \Longrightarrow 3a - 2b + c = 0 \\ f''(1) = 0 \Longrightarrow 6a + 2b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1/11 \\ b = -3/11 \\ c = -9/11 \\ d = 3 \end{array}\right.$$

$$f(x) = \frac{1}{11}x^3 - \frac{3}{11}x^2 - \frac{9}{11}x + 3,$$

$f''(-1) = -6a + 2b = -\frac{6}{11} - \frac{6}{11} = -\frac{12}{11} < 0 \Longrightarrow$ el extremo en el punto donde $x = -1$ es un máximo.

Problema 3 Hallar el área encerrada por las funciones $f(x) = 2x^2 - 5x - 10$ y $g(x) = x^2 - 3x + 25$.

Solución:



$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 2x^2 - 5x - 10 = x^2 - 3x + 25 \Longrightarrow x = -5, \;\; x = 7$$

$$H(x) = \int (f(x) - g(x))\,dx = \int (x^2 - 2x - 35)\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - 35x$$

$$S = \int_{-5}^{7} (f(x) - g(x))\,dx = H(7) - H(-5) = -288$$

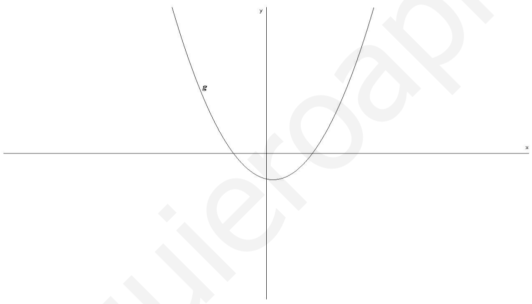
$$S = |S| = 288\,u^2$$

Problema 4 Dada la función $f(x) = |x^2 - 2x - 35|$ se pide:

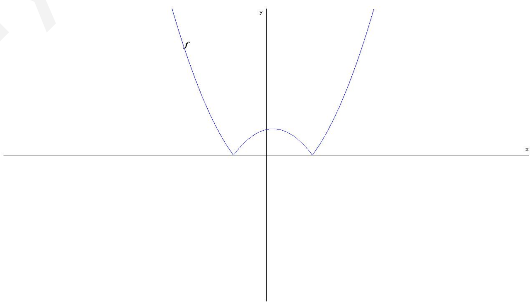
1. Representación gráfica de forma aproximada y su forma como una función definida por ramas
2. Estudiar su continuidad y derivabilidad a la vista del estudio anterior.

Solución:

1. LLamamos $g(x) = x^2 - 2x - 35$ y la representamos gráficamente:



La función $f(x) = |x^2 - 2x - 35|$ no puede tener recorrido por debajo del eje de abcisas. Esta función sería:



Luego:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 35 & \text{si} \quad x < -5 \\ -x^2 + 2x + 35 & \text{si} \quad -5 \le x < 7 \\ x^2 - 2x - 35 & \text{si} \quad x \ge 7 \end{cases}$$

2. Claramente y a la vista de la gráfica la función es continua en todo R pero no sería derivable en los puntos $x = -5$ y $x = 7$ donde presenta picos. En esos picos podríamos trazar infinitas tangentes a la gráfica de f.