Problema 1 *(4 puntos)* Dada la función $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ se pide:

1. Dominio y corte con los ejes. Intervalos de crecimiento y decrecimiento; máximos y mínimos. Dibujo aproximado de la gráfica.

2. Calcular el área encerrada entre la gráfica $f(x)$ y el eje de abcisas.

Solución:

1. (a) Dominio: La función $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ está compuesta por el producto de dos funciones, la función $h(x) = x$ cuyo dominio es todo el eje de abcisas, y la función $t(x) = \sqrt{4-x^2}$ cuyo dominio está definido por la incuación $4 - x^2 \geq 0$. La solución de esta inecuación será: $-x^2 \geq -4 \Longrightarrow x^2 \leq 4 \Longrightarrow -2 \leq x \leq 2$. En conclusión podemos asegurar que el dominio de la función pedida será el intervalo $[-2, 2]$.

   (b) Puntos de corte con los ejes: Los puntos de corte con el eje de abcisas vendrán determinados cuando $f(x) = 0$, es decir, $x\sqrt{4-x^2} = 0$, ecuación que nos produce las soluciones: $x = 0$, $x = 2$, y $x = -2$. Por tanto la gráfica cortará al eje de abcisas en los puntos $(0, 0)$, $(2, 0)$ y en el $(-2, 0)$. Ahora calculamos los cortes con el eje de ordenadas, es decir, hacemos $x = 0$, lo que nos produce una única solución que ya habíamos obtenido antes, y es el punto $(0, 0)$.

   (c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento: Para ello calculamos la primera derivada, que sería la siguiente:

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{x}{2}(4-x^2)^{-1/2}(2x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

   Ahora tendremos que ver cuando esta derivada es positiva, es nula, o es negativa. Para ello igualamos la derivada a cero, lo que nos daría lo siguiente:

$$f'(x) = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Longrightarrow 4 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2}$$

Ahora, recordando los puntos de corte con los ejes, el dominio de la función y observando que el denominador es siempre positivo, es fácil comprobar lo que nos piden.
Entre $x = -2$ y $x = -\sqrt{2}$ el numerador de la derivada se hace negativo, luego $f'(x) < 0 \Longrightarrow$ decreciente en $[-2, -\sqrt{2}]$
Entre $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$ el numerador de la derivada se hace positivo, luego $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ creciente en $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
Entre $x = \sqrt{2}$ y $x = 2$ el numerador de la derivada se hace negativo, luego $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ decreciente en $[\sqrt{2}, 2]$

(d) A la vista del apartado anterior, está claro que, la función tiene un mínimo en $-\sqrt{2}$ y un máximo en $\sqrt{2}$, resultados que al sustituidos en la función original darían los puntos: Mínimo= $(-\sqrt{2}, -2)$ y Máximo= $(\sqrt{2}, 2)$

(e) Para dibujar la gráfica ordenamos los resultados en una tabla, y los interpretamos cuidadosamente.

x	f(x)	
0	0	
2	0	
-2	0	
$-\sqrt{2}$	-2	Mínimo
$\sqrt{2}$	2	Máximo

2. Los puntos de corte con el ejes de abcisas son -2, 0, 2. La función es impar, es decir, simétrica respecto al origen, esto se aprecia fácilmente en su representación gráfica. Esto último se puede demostrar comprobando $f(-x) = -f(x)$:

$$f(-x) = (-x)\sqrt{4 - (-x)^2} = -x\sqrt{4 - x^2} = -f(x)$$

Esto quiere decir que el área que encierra la curva entre el punto $(-2,0)$ y el $(0,0)$ es igual que el área que encierra la curva entre los puntos $(0,0)$ y el $(2,0)$. Por tanto bastará con calcular una de estas áreas y multiplicar por 2.

$$A = 2\int_0^2 f(x) = 2\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}dx$$

Resolveremos por sustitución.
$u = 4 - x^2 \Longrightarrow du = -2xdx \Longrightarrow xdx = -\frac{du}{2}$ y sustituyendo nos queda la integral siguiente:

$$\int x\sqrt{4-x^2} = -\frac{1}{2}\int \sqrt{u}du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = -\frac{u^{3/2}}{3} + C$$

y deshaciendo el cambio de variable nos quedaría:

$$A = 2\left[-\frac{(4-x^2)^{3/2}}{3}\right]_0^2 = 2\left[\frac{4^{3/2}}{3}\right] = \frac{16}{3}$$

Problema 2 *(3 puntos)* Calcular:

1. $$\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$$

2. $$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$$

3. Utilizando el cambio de variable $\ln x = t$, calcular:

$$I = \int_1^e \frac{1+\ln x^2 + (\ln x)^2}{x(1+\ln x)}dx$$

Solución:

1. Descomponiendo los polinomios según sus raices tendremos que $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ y $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Sustituyendo:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1} = \lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{x-2}{x-1} = +\infty$$

2. Para solucionar este límite voy a emplear dos métodos:

(a)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x=[1^\infty]=e^\lambda$$

Donde

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}x\left(1+\frac{1}{x^2}-1\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{1}{x}=0$$

Luego

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x=e^\lambda=e^0=1$$

(b)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x=A$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x=\ln A$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\ln A$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

En esta condiciones podemos aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{-2/x^3}{1+1/x^2}}{-1/x^2}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{2}{\infty}=0$$

Es decir, $\ln A=0\Longrightarrow\ A=1$

3. Primero voy a solucionar la integral sin tener en cuenta los límites de integración y luego los aplicaremos.
La integral la vamos a resolver por sustitución, haciendo $\ln x=t\Longrightarrow \frac{1}{x}dx=dt$ y sustituyendo tendremos:

$$\int\frac{1+\ln x^2+(\ln x)^2}{x(1+\ln x)}dx=\int\frac{1+2\ln x+(\ln x)^2}{x(1+\ln x)}dx=\int\frac{1+2t+t^2}{(1+t)}dt=$$

$$\int\frac{(1+t)^2}{1+t}dt=\int(1+t)dt=t+\frac{t^2}{2}+C=\ln x+\frac{(\ln x)^2}{2}+C$$

$$I=\left[\ln x+\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e=\ln e+\frac{(\ln e)^2}{2}-\left(\ln 1+\frac{(\ln 1)^2}{2}\right)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

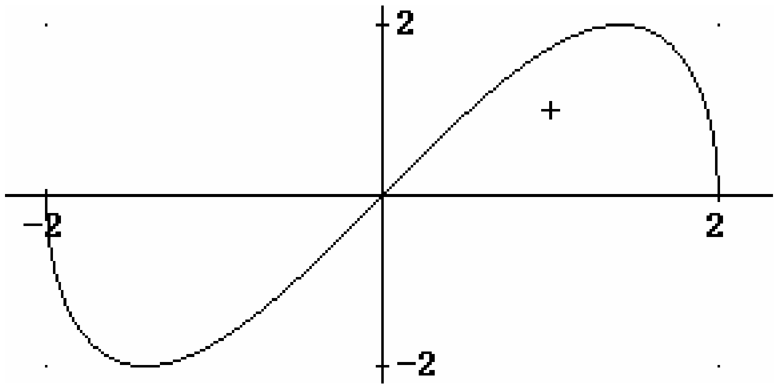
Problema 3 *(3 puntos)* Determina los puntos de la curva $y^2 = 4x$ que estén a distancia mínima del punto $(4,0)$.
Solución:
Un punto genérico de la gráfica sería de la forma $(x, \sqrt{4x})$, y la distancia de este punto al $(4,0)$ será:

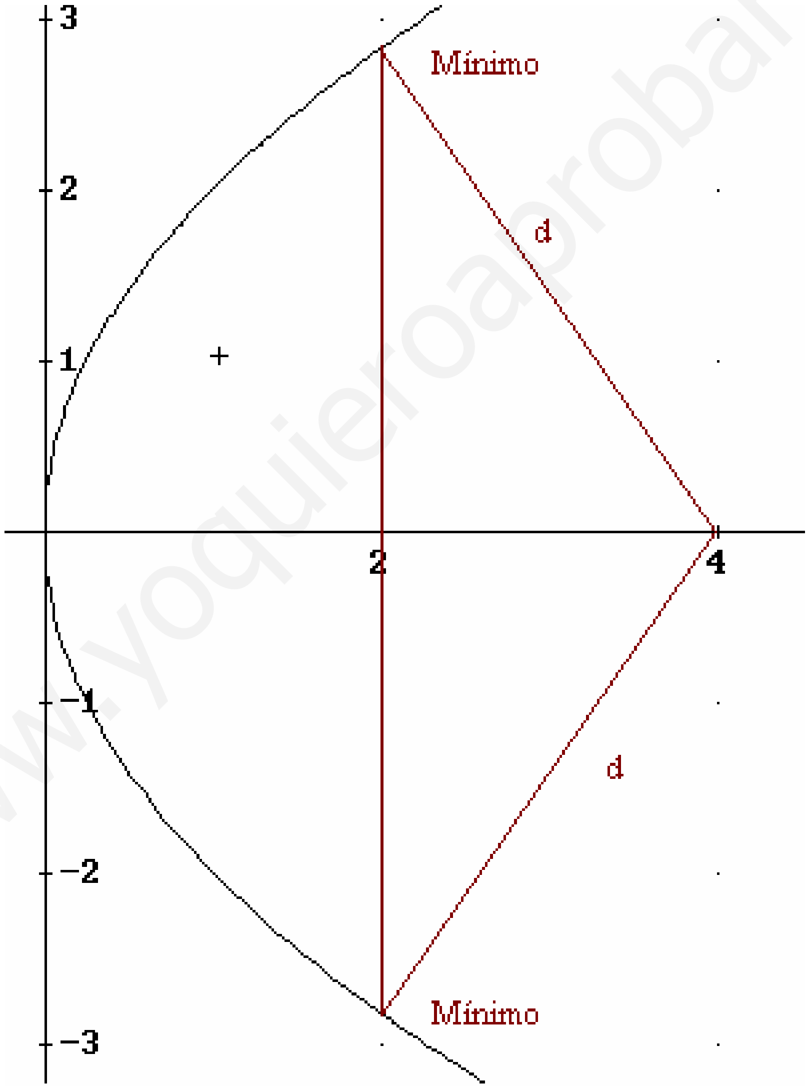
$$d = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{4x} - 0)^2} = \sqrt{x^2 + 4x + 16}$$

Tendremos que calcular los mínimos de esta función, y para ello calculamos la primera derivada.

$$d' = \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 16)^{-1/2}(2x - 4) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 + 4x + 16}} = 0 \Longrightarrow \; x = 2$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada primera. Como el denominador es siempre positivo, basta estudiar el numerador:
Si $x < 2 \Longrightarrow \; d' < 0 \Longrightarrow$ decrece
Si $x > 2 \Longrightarrow \; d' > 0 \Longrightarrow$ crece
Con ésto concluimos con que en la abcisa $x = 2$ tenemos un mínimo, calculamos ahora las ordenadas correspondientes sustituyendo en la función $y^2 = 4x$, y obtenemos: $y = \pm\sqrt{4x} = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$.
Tenemos, por tanto, dos puntos que cumplen la condición de mínimo $(2, -2\sqrt{2})$ y $(2, 2\sqrt{2})$.


2
−2
2
−2


3
2
1
−1
−2
−3
2
4
Mínimo
d
d
Mínimo