Problema 1 En una empresa de enlatado de cerveza te encargan que calcules las dimensiones óptimas, que debe de tener una lata, de manera que tenga una capacidad de 0,5 litros, y gastemos la menor cantidad de material en hacerla.

Solución:

$$V = S_{base} \cdot h \Longrightarrow V = \pi r^2 h = 0,5 \Longrightarrow h = \frac{0,5}{\pi r^2}$$

$$S_{total} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = \frac{1}{r} + 2\pi r^2 \Longrightarrow S' = -\frac{1}{r^2} + 4\pi r = 0 \Longrightarrow$$

$$r = 0,4301270069 dm$$

$$S'' = \frac{2}{r^3} + 4\pi \Longrightarrow S''(0,43) = 37.69911184 > 0 \Longrightarrow \text{Mínimo}$$

$$h = 0,02944513539 dm$$

Problema 2 dada la función

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 1}$$

Calcular:

1. Dominio
2. Puntos de Corte
3. Simetrías
4. Asíntotas
5. Monotonía
6. Máximos y Mínimos.
7. El área encerrada entre la gráfica, el eje de abcisas y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.

Solución:

1. Dominio: $Dom f = R - \{-1, 1\}$
2. Puntos de Corte: $(0, 0)$

3. Simetrías:
$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=-f(x)\Longrightarrow \text{Impar}$$

4. Asíntotas:

   (a) Verticales: $x=1,\ x=-1$
$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{2x^3}{x^2-1}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{2x^3}{x^2-1}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$
$$\lim_{x\longrightarrow -1^+}\frac{2x^3}{x^2-1}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$$
$$\lim_{x\longrightarrow -1^-}\frac{2x^3}{x^2-1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

   (b) Horizontales:
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2x^3}{x^2-1}=\infty$$
   No hay asíntotas horizontales.

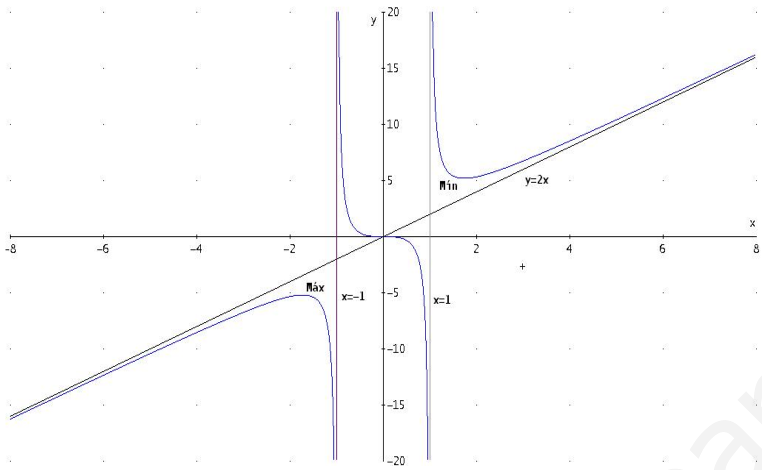
   (c) Oblicuas: $y=mx+n$
$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2x^3}{x^3-x}=2$$
$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x^3}{x^3-x}-2x\right)=0$$
   La asíntota oblicua es $y=2x$.

5. Monotonía:
$$f'(x)=\frac{2x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}=0\Longrightarrow x=\sqrt{3},\ \ x=-\sqrt{3}$$

$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},+\infty)$
$+$	$-$	$+$
creciente	decreciente	creciente

6. Máximos y Mínimos: A la vista del cuadro anterior podemos afirmar que la función presenta un Máximo en el punto $(-\sqrt{3},-3\sqrt{3})$ y un Mínimo en el punto $(\sqrt{3},3\sqrt{3})$.

7. Representación Gráfica:



8. El área encerrada entre la gráfica, el eje de abcisas y las rectas $x = 2$ y $x = 4$:

$$\int_2^4 \frac{2x^3}{x^2-1} = \int_2^4 2x\,dx + \int_2^4 \frac{2x}{x^2-1} = x^2 + \ln(x^2-1)\Big]_2^4 = 12 + \ln 5$$

Problema 3 Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + mx & \text{si} \quad x < -1 \\ x^3 + n & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

1. determina m y n para que se cumplan la hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[-5, 3]$.

2. Halla los puntos del intervalo que garantiza dicho teorema.

Solución:

1. Para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio la función debe de ser continua en el intervalo $[-5, 3]$ y derivable en el intervalo $(-5, 3)$.

   (a) Continuidad:

   $$\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1} 2x^2 + mx = 2 - m$$

   $$\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1} x^3 + n = -1 + n$$

   Para que la función sea continua será: $2 - m = -1 + n \Longrightarrow m + n = 3$.

(b) Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + m & \text{si} \quad x < -1 \\ 3x^2 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable será: $f'(-1^-) = f'(-1^+) \Longrightarrow -4 + m = 3 \Longrightarrow m = 7$

Luego los valores buscados son $m = 7$ y $n = -4$.

2. El teorema concluye con que $\exists c \in [-5, 3]$ de manera que

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(-5)}{3 - (-5)} = \frac{23 - 15}{8} = 1$$

$f'(c) = 4c + 7 = 1$ si $c < -1 \Longrightarrow c = -3/2$, solución que vale al ser un punto interior del intervalo.

$f'(c) = 3c^2 = 1$ si $c \geq -1 \Longrightarrow c = -\sqrt{1/3}$ y $c = \sqrt{1/3}$, soluciones que valen por ser puntos interiores del intervalo.