

Problema 1 (3 puntos) Represente gráficamente el recinto limitado por las parábolas $y = 1 - x^2$ e $y = 2x^2$ y calcule su área.

(Extremadura Junio 2007)

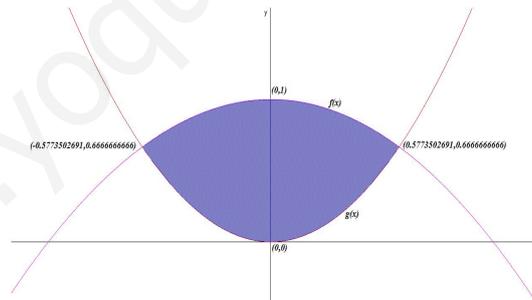
Solución:

Estudiamos las gráficas

- $$f(x) = 1 - x^2 = 0 \implies x = 1, x = -1$$

$$f'(x) = -2x = 0 \implies x = 0$$

$$f''(x) = -2 \implies f''(0) = -2 < 0 \implies (0, 1) \text{ Máximo}$$
- $g(x) = x^2$ parábola vertical con vértice en el punto $(0, 0)$ donde, claro está, hay un mínimo.
- Las dos funciones se cortan en los puntos donde $f(x) = g(x) \implies 1 - x^2 = 2x^2 \implies 1 - 3x^2 = 0 \implies x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



$$F(x) = \int (f(x) - g(x)) dx = \int (1 - 3x^2) dx = x - x^3$$

$$S = \left| \left[x - x^3 \right]_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \right| = \frac{4\sqrt{3}}{9} u^2$$

Problema 2 (2 puntos) Resolver los siguientes límites

1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + x} \right)$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{e^x - \cos x}$$

Solución:

1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + x}) &= [\infty - \infty] \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + x})(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + x})}{(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + x})} &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - 1) - (x^2 + x)}{(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + x})} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 - x}{(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + x})} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{e^x - \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{e^x + \sin x} = 2$$

Problema 3 (3 puntos) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{si } x < 1 \\ bx^2 - ax - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Hallar a y b de manera que f cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Encontrar aquellos puntos que el teorema asegure su existencia.

Solución:

1. f es continua en ambas ramas, para cualquier valor de a y b , hay que calcular a y b para afirmar la continuidad en $x = 1$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} bx^2 - ax - 1 = b - a - 2 \end{cases} \implies a = -1$$

2. f es derivable en ambas ramas, para cualquier valor de a y b , hay que calcular a y b para afirmar la derivabilidad en $x = 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x < 1 \\ 2bx - a & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f'(1^-) = 2a + b \\ f'(1^+) = 2b - a \end{cases} &\implies 3a = b \end{aligned}$$

3.

$$\begin{cases} a = -1 \\ a = 2b \end{cases} \implies \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}$$

4. Tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + 1 & \text{si } x < 1 \\ -3x^2 + x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 3 & \text{si } x < 1 \\ -6x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en el $(0, 2)$. El Teorema afirma que existe al menos un punto $c \in (0, 2)$ que cumple $f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{-11 - 1}{2} = -6$.

Si cogemos la primera rama

$$f'(x) = -2x - 3 = -6 \implies x = 3/2$$

Si cogemos la segunda rama

$$f'(x) = -6x + 1 = -6 \implies x = 7/6$$

Los dos puntos son válidos.

Problema 4 (2 puntos) Hallar una función polinómica de tercer grado tal que tenga un extremo relativo en $(1, 1)$ y un punto de inflexión en $(0, 3)$. ¿Es $(1, 1)$ el único extremo de la función? Determinar los máximos y mínimos relativos de f .

(Islas Canarias Junio 2007)

Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\begin{cases} f(1) = 1 \implies a + b + c + d = 1 \\ f(0) = 3 \implies d = 3 \\ f'(1) = 0 \implies 3a + 2b + c = 0 \\ f''(0) = 0 \implies 2b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 3, \quad f'(x) = 3x^2 - 3, \quad f''(x) = 6x$$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \implies x = \pm 1$, si utilizamos el criterio de la segunda derivada:

$$\begin{cases} f''(1) = 6 > 0 \implies (1, 1) \text{ M\u00ednimo} \\ f''(-1) = -6 < 0 \implies (-1, 5) \text{ M\u00e1ximo} \end{cases}$$

Para los puntos de inflexión $f''(x) = 6x = 0 \implies x = 0$, para ver si se trata de un punto de inflexión recurrimos a la tercera derivada $f'''(x) = 6 \implies f'''(0) = 6 \neq 0$, por lo que el punto $(0, 3)$ es de Inflexión.

Problema 5 (2 puntos) Calcular la siguientes integrales

1. (Castilla-La Mancha junio-2007)

$$\int \frac{2}{1 + \sqrt{x}} dx$$

2. (Extremadura junio-2007)

$$\int_3^{10} (x - 2)^{1/3} dx$$

Solución:

1. $t = \sqrt{x} \implies t^2 = x \implies dx = 2t dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{1 + \sqrt{x}} dx &= 4 \int \frac{t}{1 + t} dt = 4 \int \frac{t}{1 + t} dt = 4 \int \left(1 - \frac{1}{1 + t}\right) dt = \\ &= 4 [t - \ln(1 + t)] = 4 [\sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x})] + C \end{aligned}$$

- 2.

$$\int_3^{10} (x - 2)^{1/3} dx = \left. \frac{(x - 2)^{4/3}}{4/3} \right|_3^{10} = \frac{45}{4}$$