Problema 1 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2bx + 4 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2ax^2 + bx + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Hallar a y b de manera que f cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Encontrar aquellos puntos que el teorema asegura su existencia.

Solución:

1. f es continua en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la continuidad en $x = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (ax^2 - 2bx + 4) = a - 2b + 4 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (2ax^2 + bx + 1) = 2a + b + 1 \end{array} \right. \Longrightarrow a + 3b = 3$$

2. f es derivable en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la derivabilidad en $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax - 2b & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ 4ax + b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(1^-) = 2a - 2b \\ f'(1^+) = 4a + b \end{array} \right. \Longrightarrow 2a + 3b = 0$$

3. $$\left\{ \begin{array}{l} a + 3b = 3 \\ 2a + 3b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -3 \\ b = 2 \end{array} \right.$$

4. Tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 - 4x + 4 & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ -6x^2 + 2x - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -6x - 4 & \text{si} \quad x < 1 \\ -12x + 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en el $(0, 2)$. El

Teorema afirma que existe al menos un punto $c \in (0,2)$ que cumple $f'(c) = \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = -\dfrac{15}{2}$.

Si cogemos la primera rama $c < 1$:

$$f'(c) = -6c - 4 = -15/2 \Longrightarrow c = 7/12 \text{ si vale}$$

Si cogemos la segunda rama $c \geq 1$:

$$f'(c) = -12c + 2 = -15/2 \Longrightarrow c = 19/24 \text{ no vale}$$

El punto $c \in (0,2)$ al que hace referencia el teorema es $c = 7/12$.

Problema 2 Hallar una función polinómica de tercer grado tal que pasa por el punto $(0,1)$, tenga un extremo relativo en el punto $(1,3)$ y un punto de inflexión en $x = 2$. Decidir si el extremo es un máximo o un mínimo.

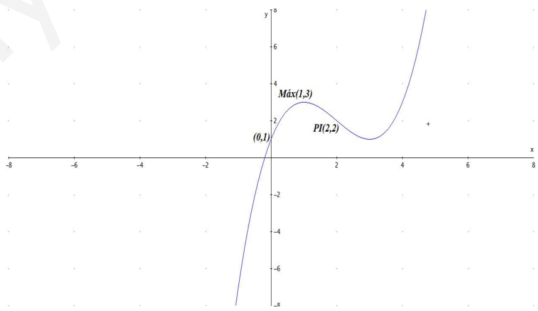
Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 1 \Longrightarrow d = 1 \\ f(1) = 3 \Longrightarrow a + b + c + d = 3 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 3a + 2b + c = 0 \\ f''(2) = 0 \Longrightarrow 12a + 2b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -3 \\ c = 9/2 \\ d = 1 \end{array}\right.$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1 \Longrightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2} \Longrightarrow f''(x) = 3x - 6$$

$f''(1) = 3 - 6 = -3 < 0 \Longrightarrow$ el extremo en el punto $(3, -50)$ es un máximo.



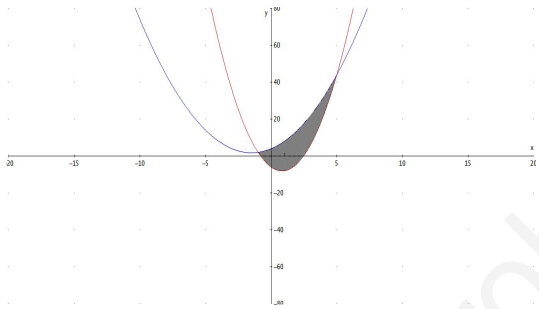
Problema 3 Se pide:

1. Hallar el área encerrada por las funciones $f(x) = 3x^2 - 5x - 6$ y $g(x) = x^2 + 3x + 4$.

2. Calcular el volumen de revolución formado por la gráfica de la función g al girar sobre el eje OX en el intervalo $[0,1]$.

Solución:

1. La área sería:



$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 3x^2 - 5x - 6 = x^2 + 3x + 4 \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 5$$

$$H(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (2x^2 - 8x - 10)\, dx = \frac{2x^3}{3} - 4x^2 - 10x$$

$$S = \int_{-1}^{5} (f(x) - g(x))\, dx = H(5) - H(-1) = -72$$

$$S = |S| = 72\, u^2$$

2.

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 + 3x + 4)^2\, dx = \pi \int_0^1 (x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 24x + 16)\, dx =$$

$$\left. \frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{2} - \frac{17x^3}{3} + 12x^3 + 16x \right]_0^1 = \frac{1061\pi}{30}\, u^3$$

Problema 4 Dada la función $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$ se pide:

1. Representación gráfica de forma aproximada y su forma como una función definida por ramas

2. Estudiar su continuidad y derivabilidad a la vista del estudio anterior.

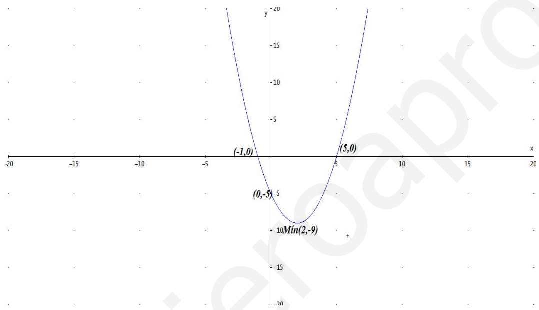
Solución:

1. LLamamos $g(x) = x^2 - 4x - 5$ y la representamos gráficamente. La función $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$ no puede tener recorrido por debajo del eje de abcisas. Esta función sería:

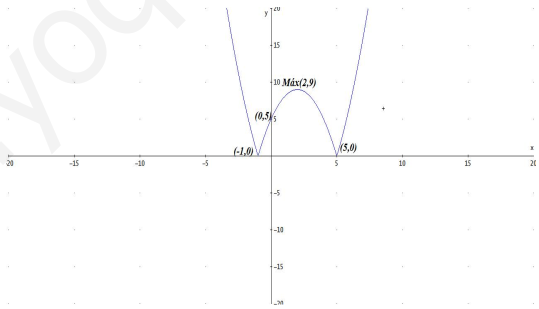
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 5 & \text{si} \quad x < -1 \\ -x^2 + 4x + 5 & \text{si} \quad -1 \leq x < 5 \\ x^2 - 4x - 5 & \text{si} \quad x \geq 5 \end{cases}$$

2. Claramente y a la vista de la gráfica la función es continua en todo R pero no sería derivable en los puntos $x = -1$ y $x = 5$ donde presenta picos. En esos picos podríamos trazar infinitas tangentes a la gráfica de f.

   La gráfica de la función g:



   La gráfica de la función f:



Problema 5 Estudiar la derivabilidad de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{3x}{x+2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

y dibuja una representación gráfica aproximada.

Solución:

Continuidad en $x = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x}{x-2} = 0 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{3x}{x+2} = 0 \\ \\ f(0) = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 0$$

En la rama $x < 0$ la función es siempre continua y en la rama $x \geq 0$ la función es siempre continua. Luego la función es continua en R.

Derivabilidad en $x = 2$:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{-2}{(x-2)^2} & \text{si} & x < 0 \\ \\ \dfrac{3}{(x+2)^2} & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right.$$

$f'(0^-) = -1/2 \neq f'(0^+) = 3 \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.

En conclusión f es continua en R y derivable en $R - \{0\}$.