Problema 1 Calcula la primitiva de la función $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$ que se anula en el punto $x = 2$

Solución:

$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

En $x = 2$ tenemos: $\dfrac{1}{3}\sqrt{3^3} + C = 0 \Longrightarrow C = -\sqrt{3}$

(Cataluña: Selectividad Junio 2002)

Problema 2 Calcular la integral $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx$.

Solución:

Resolvemos por partes $u = x \Longrightarrow du = dx$, $dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x}$

$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C$$

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx = -\frac{2}{e} + 1$$

(Extremadura: Selectividad Junio 2002)

Problema 3 Dibuja la superficie limitada por la parábola $y = x^2 - 4x + 5$ y la recta $y = x + 1$. Calcula el área de dicha superficie.

Solución:

Calculamos los puntos de corte $x^2 - 4x + 5 = x + 1 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = 4$

$$\int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)\,dx = -\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} - 4x\Big]_1^4 = \frac{9}{2}$$

(Navarra: Selectividad Junio 2002)

Problema 4 ¿Cuándo se dice que una función $P(x)$ es una primitiva de $f(x)$? Encontrar una primitiva de las siguientes funciones: $f(x) = \dfrac{x}{(x-2)(x+1)}$;

$g(x) = xe^x$

Solución:

$P(x)$ es la primitiva de $f(x)$ si $\int f(x)\, dx = P(x) + C$

$\int \frac{x}{(x-2)(x+1)}$ se resuelve por descomposición polinómica:

$$\frac{x}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$x = A(x+1) + B(x-2) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \Longrightarrow 2 = 3A \\ x = -1 \Longrightarrow -1 = -3B \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 2/3 \\ B = 1/3 \end{array} \right.$$

$$\int \frac{x}{(x-2)(x+1)} = \frac{2}{3} \ln|x-2| + \frac{1}{3} \ln|x+1| + C$$

$g(x) = xe^x$ se resuelve por partes: $u = x \Longrightarrow du = dx$, $dv = e^x dx \Longrightarrow v = e^x$

$$\int xe^x\, dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

(País Vasco: Selectividad Junio 2002)

Problema 5 Calcular la integral $\int \frac{2x}{x^2 - 2x - 3}\, dx$

Solución:

Se resuelve por descomposición polinómica

$$\frac{2x}{x^2 - 2x - 3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x+1)}{x^2 - 2x - 3}$$

$$2x = A(x-3) + B(x+1) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \Longrightarrow -2 = -4A \\ x = 3 \Longrightarrow 6 = 2B \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1/2 \\ B = 3/2 \end{array} \right.$$

$$\int \frac{2x}{x^2 - 2x - 3}\, dx = \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln|x-3| + C$$

(Mío: Selectividad ¿Junio 2006?)