Problema 1 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+6}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

se pide:

1. (0,75 puntos). Estudiar su continuidad.
2. (1 punto). Estudiar la existencia de asíntotas de su gráfica y, en su caso, calcularlas.
3. (1,25 puntos). Hallar los extremos relativos y esbozar de su gráfica.

Solución:

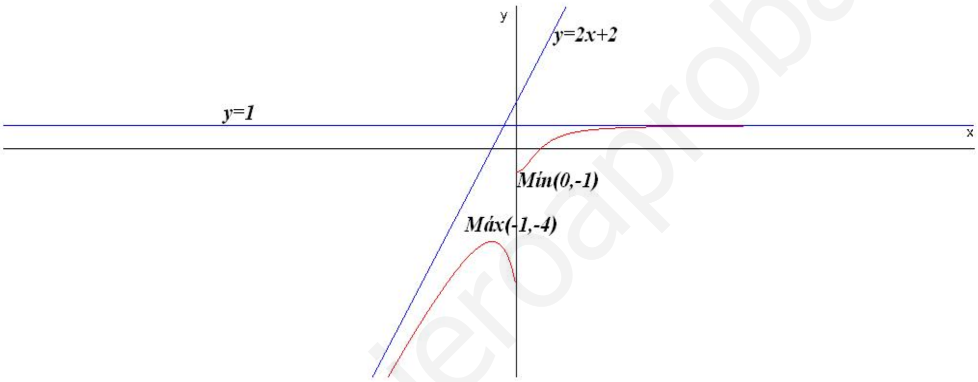
1. $$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{2x^2+6}{x-1} = -6$$
$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{x^2+1} = -1$$
Como $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \neq \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}$ la función tiene en $x = 0$ un discontinuidad no evitable, hay un salto.

2. Cuando $x < 0$: No hay asíntotas verticales ni horizontales, pero hay oblicuas: $y = mx + n \Longrightarrow y = 2x + 2$
$$m = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{2x^2+6}{x^2-x} = 2$$
$$n = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2+6}{x-1} - 2x \right) = 2$$
Cuando $x \ge 0$: No hay asíntotas verticales pero si horizontales y, por tanto, no hay oblicuas. $y = 1$
$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$$

3.
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x^2-2x-3)}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Cuando $x < 0: \; x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = -1, \; x = 3$ No vale. En $x = -1$ la función pasa de crecer a decrecer, luego hay un máximo en el punto $(-1, -4)$

$x \geq 0: \; 4x = 0 \Longrightarrow x = 0$. En $x = 0$ la función empieza a crecer, luego hay un mínimo en el punto $(0, -1)$



Problema 2 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}$$

se pide:

1. (0,75 puntos). Hallar las asíntotas de su gráfica.
2. (1,75 puntos). Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcular sus puntos de inflexión.
3. (0,5 puntos). Esbozar la gráfica de la función.

Solución:

$$f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2} = \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)}$$

1. Asíntotas:

- Verticales: $x = -1$ y $x = 4$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = \left[\frac{-135}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = \left[\frac{-135}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 4^-} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = \left[\frac{40}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 4^-} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = \left[\frac{40}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

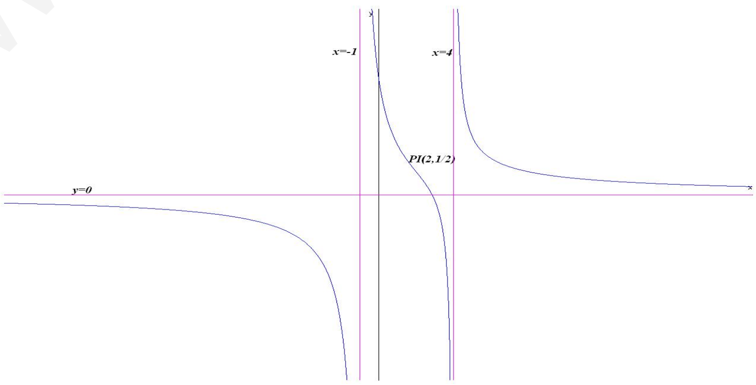
2. $f'(x) = -\dfrac{5(7x^2-40x+88)}{2(x+1)^2(x-4)^2} < 0 \ \forall x \in R$. Luego f decrece en todo el dominio $R - \{-1, 4\}$.

$$f''(x) = -\frac{5(7x^3-60x^2+264x-344}{(x+1)^3(x-4)^3} = 0 \Longrightarrow x = 2$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa	Cóncava	Convexa	Cóncava

Hay un punto de inflexión en $(2, 5/2)$.

3. La gráfica es:



Problema 3 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, se pide:

1. (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$.
2. (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx$.

Solución:

1.
$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0, \ \ m = f'(0) = 1; \ \ f(0) = 0 \Longrightarrow y = x$$

2.
$$\int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)\,dx = x - \arctan x]_0^1 =$$
$$1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{4}$$

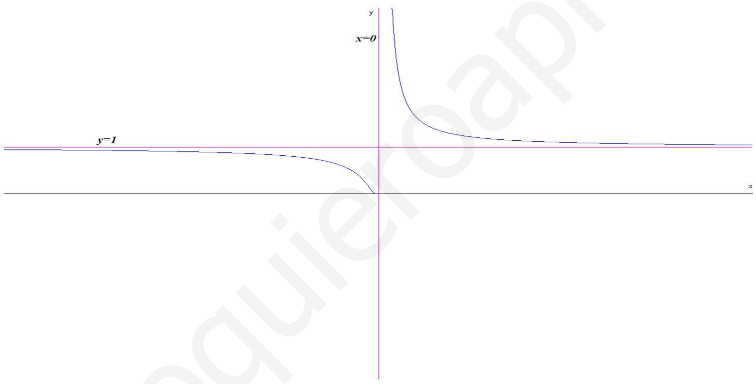
Problema 4 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = e^{1/x}$, se pide:

1. (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$ y estudiar la existencia de $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)$.
2. (1 punto). Esbozar la gráfica $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas.

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} e^{1/x} = 1$; $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} e^{1/x} = 1$.

   $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$; $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} e^{1/x} = \infty$; luego en 0 no extiste el límite.
2. Por el apartado anterior la función tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y una asíntota horizontal en $y = 1$.
$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2} < 0, \ \forall x \in R - \{0\}$$
   Luego la función es siempre decreciente.


y
x=0
y=1
x