Problema 1 Calcular los límites:

1. $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\ln(1-\sin x)}{\ln(1+\sin x)}$

2. $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{1+x-e^x}{\sin^2 x}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\ln(1-\sin x)}{\ln(1+\sin x)} = -1$

2. $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{1+x-e^x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{2}$

Problema 2 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$$

Se pide:

1. Asíntotas

2. Monotonía y extremos

3. Curvatura y puntos de Inflexión

4. Representación aproximada

5. La recta tangente y la normal a $f(x)$ en el punto de abcisa $x = 2$

6. Área encerrada por la curva y las rectas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$

Solución:

1. - Verticales: No Hay, el denominador no se anula nunca.
   - Horizontales:
     $$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \infty$$
     No hay asíntota horizontal.
   - Oblicuas: $y = mx + n$
     $$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3}{x^3+x} = 1$$
     $$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} + x\right) = 0$$
     La asíntota oblicua es $y = x$

www.yoquieroaprobar.es

2.
$$f'(x) = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} \geq 0$$

La función es siempre creciente. En $x = 0$ la función pasa de crecer a crecer y, por tanto, no es un extremo.

3.
$$f''(x) = \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = \pm\sqrt{3}$$

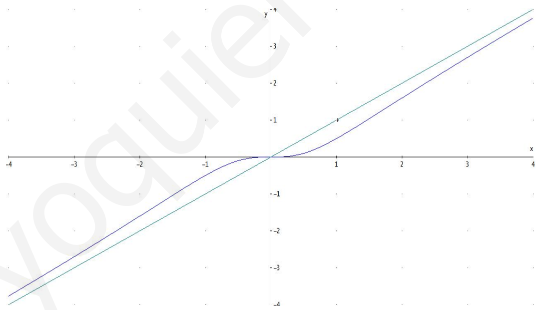
	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cócava	convexa	cócava

Cóncava: $(-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3})$

Convexa:$(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

Serán puntos de Inflexión los puntos: $(0,0)$, $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ y $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

4. La representación será:



5.
$$f(2) = \frac{8}{5},\ \ f'(2) = m = -\frac{28}{25}$$

Recta tangente: $y - \frac{8}{5} = -\frac{28}{25}(x-2)$ Recta normal: $y - \frac{8}{5} = \frac{25}{28}(x-2)$

6.
$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln|x^2+1|}{2}\Bigg]_0^1 = \frac{1-\ln 2}{2}\,u^2$$

www.yoquieroaprobar.es