Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x}$$

Se pide:

1. Dominio
2. Puntos de corte
3. Simetrías
4. Tipos de discontinuidad y Asíntotas
5. Monotonía y extremos
6. Curvatura y puntos de Inflexión
7. Representación aproximada
8. La recta tangente y la normal a $f(x)$ en el punto de abcisa $x = -1$

Solución:

1. $Dom\, f = R - \{0, 1\}$
2. Con el eje OY: $x = 0 \Longrightarrow$ No hay.

   Con el eje OX: $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$, en $x = 0$ no hay punto de corte ya que se anula el denominador. No hay puntos de corte.
3. No hay simetría
4. - Verticales: Las únicas posibles son: $x = 0$ y $x = 1$

     En $x = 0$:

     $$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 - x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{3x^2}{2x - 1} = 0$$

     En este punto hay una discontinuidad evitable, un agujero. No hay asíntota.

     En $x = 1$:

     $$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^3}{x^2 - x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^3}{x^2 - x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

En este punto hay una discontinuidad no evitable, un salto. Si hay asíntota.

- Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - x} = \infty$$

No hay asíntota.

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 - x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - x} + x \right) = 1$$

La asíntota oblicua es $y = x + 1$

5.

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = 2$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Crece	Decrece	Crece

Creciente: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Decreciente: $(0, 1) \cup (1, 2)$

Hay un Mínimo relativo en (2,4) y un agujero en el (0,0)

6.

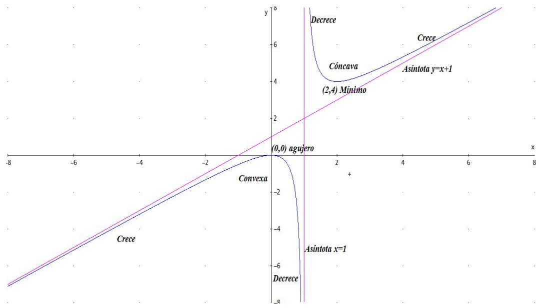
$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \neq 0 \Longrightarrow \text{No hay puntos de Inflexión}$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cócava

Convexa: $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

Cóncava:$(1, +\infty)$

7.



8.
$$f(-1) = -\frac{1}{2}, \;\; f'(-1) = m = \frac{3}{4}$$

Recta tangente: $y + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}(x+1)$ Recta normal: $y + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{4}{3}(x+1)$