Problema 1 Determinar una función f polinómica de cuarto grado y que cumpla las siguientes condiciones:

1. la recta $y = 3$ es tangente a f en el punto de abcisa $x = 1$.
2. tiene un extremo en el punto $(-1, 2)$
3. pasa por el origen de coordenadas

Solución:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

1. $f(1) = 3$ y $f'(1) = 0$
2. $f(-1) = 2$ y $f'(-1) = 0$
3. $f(0) = 0$

Tenemos, por tanto:

$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = 3 \Longrightarrow a + b + c + d + e = 3 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 4a + 3b + 2c + d = 0 \\ f(-1) = 2 \Longrightarrow a - b + c - d = 2 \\ f'(-1) = 0 \Longrightarrow -4a + 3b - 2c + d = 0 \\ f(0) = 0 \Longrightarrow e = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -5/2 \\ b = -1/4 \\ c = 5 \\ d = 3/4 \\ e = 0 \end{array}\right.$$

La función es:

$$f(x) = -\frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + 5x^2 + \frac{3}{4}x$$

Problema 2 Dada la función real de variable real

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x^2 - ax + b}{x} & \text{si} \quad -2 \le x \le -1 \\ \\ \dfrac{ax^2 - bx}{x + 2} & \text{si} \quad -1 < x \le 2 \end{array}\right.$$

Calcular a y b de manera que f cumpla las condiciones del "Teorema del Valor Medio"en el intervalo $[-2, 2]$ y calcular aquellos puntos, cuya existencia afirma el Teorema.

Solución:

1. f es continua en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la continuidad en $x = -1$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} \dfrac{x^2-ax+b}{x} = -(a+b+1) \\ \\ \lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{ax^2-bx}{x+2} = a+b \end{array}\right. \Longrightarrow 2a{+}2b = -1$$

2. f es derivable en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la derivabilidad en $x = -1$

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{x^2-b}{x^2} & \text{si} & -2 \le x \le -1 \\ \\ \dfrac{ax^2+4ax-2b}{(x+2)^2} & \text{si} & -1 < x \le 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} f'(-1^-) = 1-b \\ f'(-1^+) = -3a-2b \end{array}\right. \Longrightarrow 3a+b = -1$$

3.

$$\left\{\begin{array}{l} 2a+2b = -1 \\ 3a+b = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1/4 \\ b = -1/4 \end{array}\right.$$

4. Tenemos:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{4x^2+x-1}{4x} & \text{si} & -2 \le x \le -1 \\ \\ \dfrac{x(1-x)}{4(x+2)} & \text{si} & -1 < x \le 2 \end{array}\right.$$

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{4x^2+1}{4x^2} & \text{si} & -2 \le x \le -1 \\ \\ -\dfrac{x^2+4x-2}{4(x+2)^2} & \text{si} & -1 < x \le 2 \end{array}\right.$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo $[-2, 2]$ y derivable en el $(-2, 2)$. El Teorema afirma que existe al menos un punto $c \in (-2, 2)$ que cumple $f'(c) = \dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = \dfrac{-1/8-(-13/8)}{4)} = \dfrac{3}{8}$.

Si cogemos la primera rama

$$f'(x) = \frac{4x^2+1}{4x^2} = \frac{3}{8} \Longrightarrow \text{sin solución}$$

Si cogemos la segunda rama

$$f'(x) = -\frac{x^2+4x-2}{4(x+2)^2} = \frac{3}{8} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\dfrac{2\sqrt{15}}{5} - 2 = -3549193338 \\ x = \dfrac{2\sqrt{15}}{5} - 2 = -0,4508066615 \end{array} \right.$$

Luego el único punto sería $c = -0,4508066615$

Problema 3 Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 m. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de forma que uno de ellos tenga longitud doble de otro y tal que al construir con cada uno de ellos un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encontrar la longitud de cada trozo. **Solución:** Tenemos tres trozos de longitudes: x, $2x$ e $y = 140-3x$

Con x haremos un cuadrado de área $S_1 = \left(\dfrac{x}{4}\right)^2$

Con $2x$ haremos un cuadrado de área $S_2 = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$

Con $y = 140-3x$ haremos un cuadrado de área $S_3 = \left(\dfrac{y}{4}\right)^2 = \left(\dfrac{140-3x}{4}\right)^2$

La función a optimizar sería:

$$S(x) = S_1 + S_2 + S_3 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{140-3x}{4}\right)^2 = \frac{7x^2-420x+9800}{8}$$

$$S'(x) = \frac{14x-420}{8} \Longrightarrow x = 30$$

$$S''(x) = \frac{7}{4} \Longrightarrow S''(30) = \frac{7}{4} > 0 \Longrightarrow \text{Minímo}$$

La longitud de los trozos serán 30, 60 y 50 m. respectivamente.