Problema 1 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 5ax^2 - 2bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 3ax^2 + bx - 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Hallar a y b de manera que f cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Encontrar aquellos puntos que el teorema asegura su existencia.

Solución:

1. f es continua en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la continuidad en $x = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (5ax^2 - 2bx + 1) = 5a - 2b + 1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (3ax^2 + bx - 2) = 3a + b - 2 \end{array} \right. \Longrightarrow 2a - 3b = -3$$

2. f es derivable en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la derivabilidad en $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 10ax - 2b & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ 6ax + b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(1^-) = 10a - 2b \\ f'(1^+) = 6a + b \end{array} \right. \Longrightarrow 4a - 3b = 0$$

3.
$$\left\{ \begin{array}{l} 2a - 3b = -3 \\ 4a - 3b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 3/2 \\ b = 2 \end{array} \right.$$

4. Tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{15}{2}x^2 - 4x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ \dfrac{9}{2}x^2 + 2x - 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 15x - 4 & \text{si} \quad x < 1 \\ 9x + 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en el $(0, 2)$. El

Teorema afirma que existe al menos un punto $c \in (0,2)$ que cumple $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \dfrac{19}{2}$.

Si cogemos la primera rama $c < 1$:

$$f'(c) = 15c - 4 = 19/2 \Longrightarrow c = 9/10 \text{ si vale}$$

Si cogemos la segunda rama $c \geq 1$:

$$f'(c) = 9c + 2 = 19/2 \Longrightarrow c = 5/6 \text{ no vale}$$

El punto $c \in (0,2)$ al que hace referencia el teorema es $c = 9/10$.

Problema 2 Hallar una función polinómica de tercer grado tal que pasa por el punto $(0,4)$, tenga un extremo relativo en el punto $(3,-50)$ y un punto de inflexión en $x = 1$. Decidir si el extremo es un máximo o un mínimo.

Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 4 \Longrightarrow d = 4 \\ f(3) = -50 \Longrightarrow 27a + 9b + 3c + d = -50 \\ f'(3) = 0 \Longrightarrow 27a + 6b + c = 0 \\ f''(1) = 0 \Longrightarrow 6a + 2b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -6 \\ c = -18 \\ d = 4 \end{array}\right.$$

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 4 \Longrightarrow f'(x) = 6x^2 - 12x - 18 \Longrightarrow f''(x) = 12x - 12$$

$f''(3) = 36 - 12 = 24 > 0 \Longrightarrow$ el extremo en el punto $(3,-50)$ es un mínimo.

Problema 3 Se pide:

1. Hallar el área encerrada por las funciones $f(x) = 3x^2 + x - 3$ y $g(x) = x^2 - 3x + 3$.
2. Calcular el volumen de revolución formado por la gráfica de la función f al girar sobre el eje OX en el intervalo $[0,1]$.

Solución:

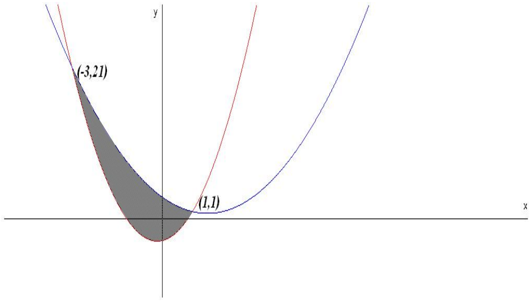
1.

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 3x^2 + x - 3 = x^2 - 3x + 3 \Longrightarrow x = -3, \;\; x = 1$$

$$H(x) = \int (f(x) - g(x))\,dx = \int (2x^2 + 4x - 6)\,dx = \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - 6x$$

$$S = \int_{-3}^{1} (f(x) - g(x))\,dx = H(1) - H(-3) = -\frac{64}{3}$$

$$S = |S| = \frac{64}{3}\,u^2$$



2.

$$V = \pi \int_0^1 (3x^2 + x - 3)^2\, dx = \pi \int_0^1 (9x^4 + 6x^3 - 17x^2 - 6x + 9)\, dx =$$

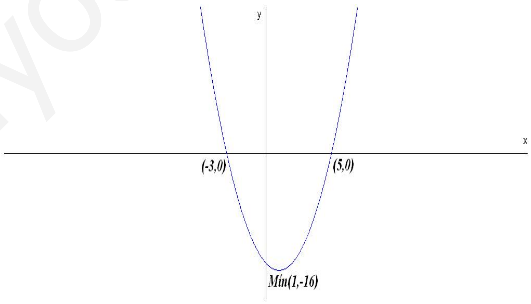
$$\left.\frac{9x^5}{5} + \frac{3x^4}{2} - \frac{17x^3}{3} - 3x^3 + 9x\right]_0^1 = \frac{109\pi}{30}\, u^3$$

Problema 4 Dada la función $f(x) = |x^2 - 2x - 15|$ se pide:

1. Representación gráfica de forma aproximada y su forma como una función definida por ramas
2. Estudiar su continuidad y derivabilidad a la vista del estudio anterior.

Solución:

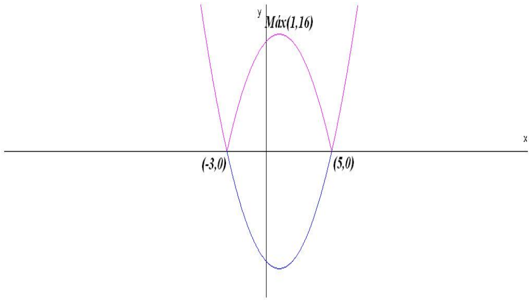
1. LLamamos $g(x) = x^2 - 2x - 15$ y la representamos gráficamente:



La función $f(x) = |x^2 - 2x - 15|$ no puede tener recorrido por debajo del eje de abcisas. Esta función sería:

Luego:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 15 & \text{si} \quad x < -3 \\ -x^2 + 2x + 15 & \text{si} \quad -3 \le x < 5 \\ x^2 - 2x - 15 & \text{si} \quad x \ge 5 \end{cases}$$



2. Claramente y a la vista de la gráfica la función es continua en todo R pero no sería derivable en los puntos $x = -3$ y $x = 5$ donde presenta picos. En esos picos podríamos trazar infinitas tangentes a la gráfica de f.

Problema 5 Estudiar la derivabilidad de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2} & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ \dfrac{2x}{x-3} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

y dibuja una representación gráfica aproximada.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

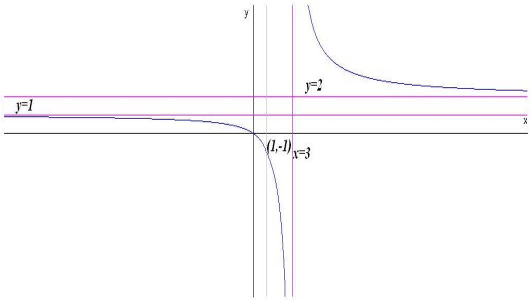
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{x}{x-2} = -1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{2x}{x-3} = -1 \\ \\ f(1) = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 1$$

En la rama $x < 1$ la función es siempre continua y en la rama $x \geq 1$ la función es discontinua en $x = 3$ donde tiene una asíntota. Luego la función es continua en $R - \{3\}$.

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{(x-2)^2} & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ \dfrac{-6}{(x-3)^2} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$f'(1^-) = -2 \neq f'(1^+) = -3/2 \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 1$.



En conclusión f es continua en $R - \{3\}$ y derivable en $R - \{1, 3\}$.