Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$$

Se pide:

1. Dominio
2. Campos de existencia
3. Puntos de corte
4. Simetrías
5. Asíntotas
6. Monotonía y extremos
7. Curvatura y puntos de Inflexión
8. Representación aproximada
9. La recta tangente y la normal a $f(x)$ en el punto de abcisa $x = 1$
10. El área encerrada por la gráfica y las rectas $x = -1$, $x = 1$ e $y = 0$.

Solución:

1. $Dom\, f = R$
2. $\dfrac{x^3}{x^2+1} > 0$ en el intervalo $(0, \infty)$

   $\dfrac{x^3}{x^2+1} < 0$ en el intervalo $(-\infty, 0)$
3. El único punto de corte es el $(0, 0)$
4. La función es impar $f(-x) = -f(x)$
5. No tiene ni asíntotas verticales ni horizontales. Veamos las oblicuas:

   $$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

   $$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = 0$$

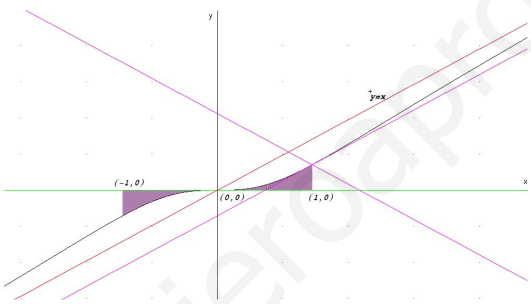
   Luego la asíntota es $y = x$

6.
$$f'(x) = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

En $x = 0$ no hay ni máximo ni mínimo, en ese punto la función pasa de ser creciente a seguir creciendo, de hecho la función es siempre creciente.

7.
$$f''(x) = \frac{-2x^3+6x}{(x^2+1)^3} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ x = 0 \end{cases}$$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	cócava	convexa	cócava	convexa



8.

9.
$$f(1) = \frac{1}{2}, \;\; f'(1) = m = 1$$

Recta tangente: $y - \frac{1}{2} = x - 1$ Recta normal: $y - \frac{1}{2} = -(x-1)$

10.
$$\frac{x^3}{x^2+1} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Hay un punto de corte en $x = 0$ dentro del intervalo de integración $(-1, 1)$

$$F(x) = \int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2 - \ln(x^2+1)}{2}$$

$$S_1 = |F(0) - F(-1)| = \frac{1-\ln 2}{2}, \quad S_2 = |F(1) - F(0)| = \frac{1-\ln 2}{2}$$

$$S = 1 - \ln 2 \; u^2$$