Problema 1 *(4 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$$

se pide:

1. Dominio.
2. Corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
5. Máximos y mínimos.
6. Dibujo aproximado de la gráfica.

Nota: Una función es simétrica respecto al eje Y si $f(-x) = f(x)$, y simétrica respecto al origen si $f(-x) = -f(x)$.

Solución:

1. D=$\{x \in R$ tales que $x^2 - 4 \neq 0\} = R - \{-2, 2\}$
2. (a) Puntos de corte con el eje Y:
   $x = 0 \Longrightarrow f(x) = -\frac{3}{4} \Longrightarrow$ la gráfica corta al eje Y en $(0, -\frac{3}{4})$.

   (b) Puntos de corte con el eje X:
   $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-3} \Longrightarrow$ la ecuación no tiene soluciones reales y por tanto la gráfica no corta al eje X en ningún punto.
3. $f(-x) = \frac{(-x)^2+3}{(-x)^2-4} = \frac{x^2+3}{x^2-4} = f(x) \Longrightarrow$ la función es simétrica respecto al eje Y.
4. $$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-8x - 6x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-14x}{(x^2 - 4)^2}$$

   Como $(x^2 - 4)^2 \geq 0$ para cualquier x, bastará estudiar el signo del numerador:

(a) Si $x < 0 \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow$ creciente.

(b) Si $x > 0 \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow$ decreciente.

En el dominio de la función tendremos que la función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y es decreciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

5. $f'(x) = 0 \Longrightarrow -14x = 0 \Longrightarrow x = 0$ que corresponde al punto $(0, -\frac{3}{4})$, punto en el que la gráfica pasa de ser creciente a ser decreciente, es decir, estamos ante un máximo.

6. Su representación gráfica sería:

Calculado las asíntotas, las habríamos encontrado verticales en $x = -2$ y $x = 2$, y horizontales en $y = 1$, ya que $\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+3}{x^2-4} = 1$.

Problema 2 *(4 puntos)*

1. Calcular:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2x\cdot e^{x^2}}{-\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2e^{x^2}+4x^2\cdot e^{x^2}}{-\cos x} =$$
$= -2$.

2. Determina el valor de a para que

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{ax} = e$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{ax} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{ax} = [1^\infty] = e^\lambda$$
$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} ax\left(\frac{x+3}{x}-1\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty} ax\left(\frac{3}{x}\right) = 3a$$

Como $\lambda = 1 \Longrightarrow 3a = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{3}$.

3. Calcular utilizando el cambio de variable adecuado :

$$\int \frac{x}{(1-2x^2)^2}dx$$

Solución:
Hacemos $u = 1-2x^2 \Longrightarrow du = -4x\cdot dx \Longrightarrow \frac{du}{-4} = x\cdot dx$ y sustituimos:

$$\int \frac{x}{(1-2x^2)^2}dx = -\frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{u^{-2+1}}{-2+1}+C = \frac{1}{4u}+C = \frac{1}{4(1-2x^2)}$$
$+C$

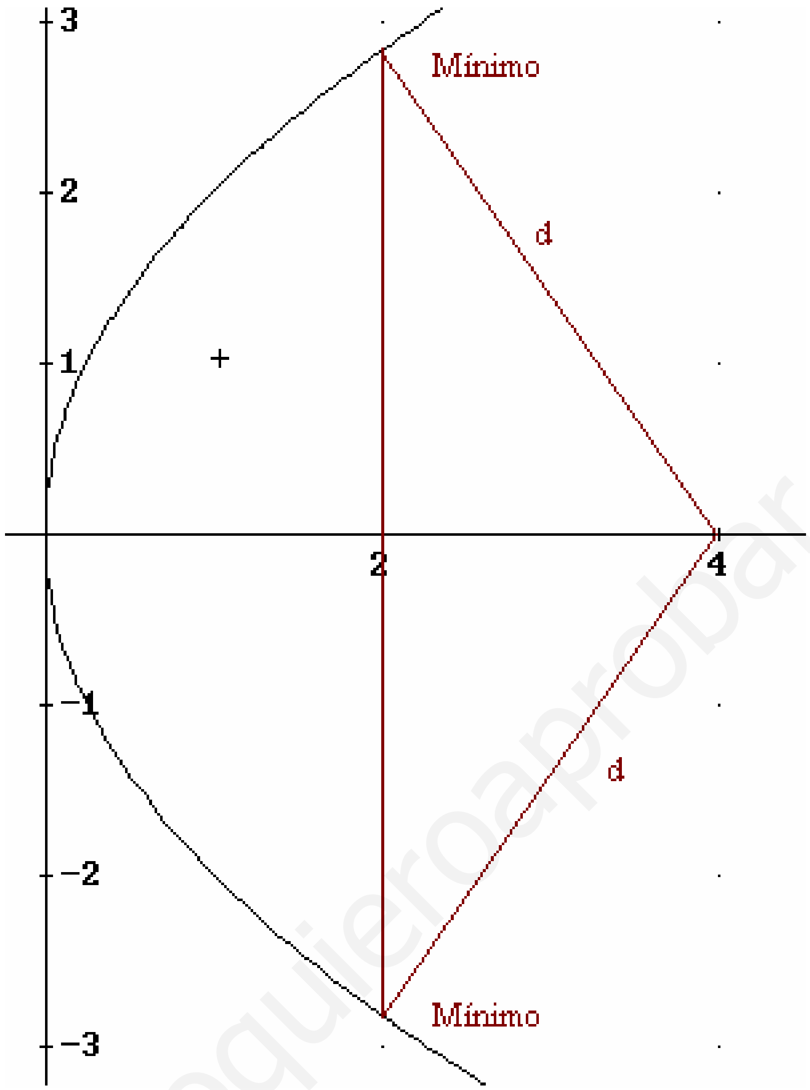
Problema 3 *(2 puntos)* Determina los puntos de la curva $y^2 = 4x$ que estén a distancia mínima del punto $(4,0)$.
Solución:
Un punto genérico de la gráfica sería de la forma $(x, \sqrt{4x})$, y la distancia de este punto al $(4,0)$ será:

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{4x}-0)^2} = \sqrt{x^2-4x+16}$$

Tendremos que calcular los mínimos de esta función, y para ello calculamos la primera derivada.

$$d' = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 16)^{-1/2}(2x - 4) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 16}} = 0 \Longrightarrow \ x = 2$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada primera. Como el denominador es siempre positivo, basta estudiar el numerador:
Si $x < 2 \Longrightarrow \ d' < 0 \Longrightarrow$ decrece
Si $x > 2 \Longrightarrow \ d' > 0 \Longrightarrow$ crece
Con ésto concluimos con que en la abcisa $x = 2$ tenemos un mínimo, calculamos ahora las ordenadas correspondientes sustituyendo en la función $y^2 = 4x$, y obtenemos: $y = \pm\sqrt{4x} = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$.
Tenemos, por tanto, dos puntos que cumplen la condición de mínimo $(2, -2\sqrt{2})$ y $(2, 2\sqrt{2})$.


3
2
1
−1
−2
−3
2
4
Mínimo
d
d
Mínimo