Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Mayo 2011

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x^2-9}$$

se pide:

1. Estudiar su continuidad y derivabilidad.
2. Representarla gráficamente.
3. Calcular el área encerrada por la función, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x-1}{x^2-9} & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ \dfrac{x-1}{x^2-9} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2-2x+9}{(x^2-9)^2} & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ \dfrac{x^2-2x+9}{(x^2-9)^2} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

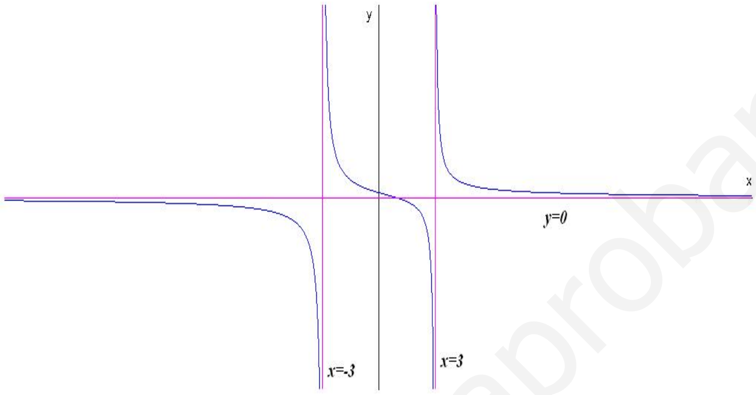
1. Continuidad y derivabilidad:

   - La función es discontinua en los puntos $x = \pm 3$ dado que en ellos se anula el denominador. Hay que comprobar la continuidad en $x = 1$:
     $$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} -\frac{x-1}{x^2-9} = 0$$
     $$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2-9} = 0$$
     $$f(1) = 0$$
     Luego la función es continua en $x = 1$. La función es continua en $R - \{-3, 3\}$
   - La función no es derivable en es $x = \pm 3$ ya que en ellos no es continua. Hay que comprobar la derivabilidad en $x = 1$:
     $$f'(1^-) = -\frac{1}{8} \quad f'(1^+) = \frac{1}{8}$$
     Luego la función no es derivable en $x = 1$. En cunclusión la función es derivable en $R - \{-3, 1, 3\}$.

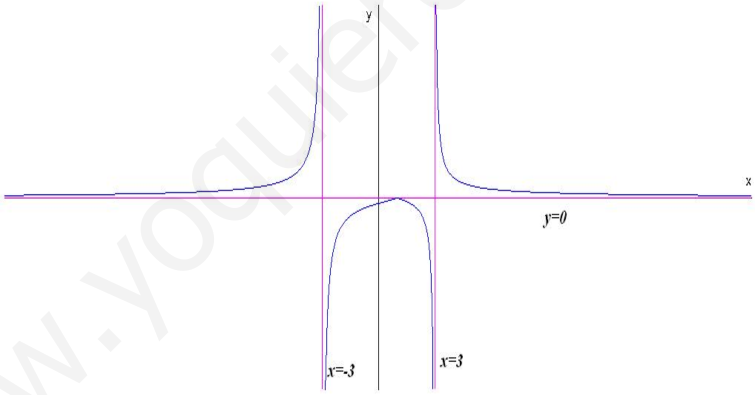
2. Representación gráfica: Para ello utilizamos la función auxiliar

$$g(x) = \frac{x-1}{x^2-9}$$

A grandes rasgos la función tiene tres asíntotas, dos verticales $x = \pm 3$ y una horizontal $y = 0$. A la vista de la derivada no hay extremos y la función es siempre decreciente. Para dibujar la función que nos piden



hay que cambiar el signo a la rama $x < 1$:



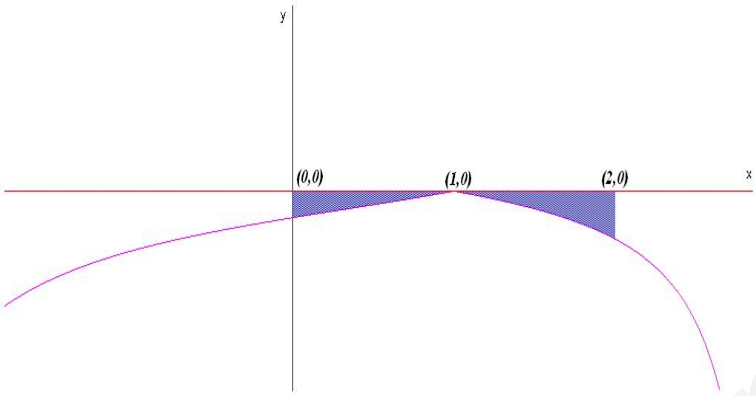
3. El área que nos piden es la suma de dos áreas dado que en $x = 1$ la función cambia de rama:

$$S_1 = \int_0^1 -\frac{x-1}{x^2-9}\,dx = -\left(\frac{1}{3}\ln|x-3| + \frac{2}{3}\ln|x+3|\right)\Big]_0^1 = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{27}{32}\right) = -0,057$$

$$S_2 = \int_1^2 \frac{x-1}{x^2-9}\,dx = \left(\frac{1}{3}\ln|x-3| + \frac{2}{3}\ln|x+3|\right)\Big]_1^2 = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{25}{32}\right) = -0,082$$

$$S = |S_1| + |S_2| = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{675}{1024}\right) = 0,14\ u^2$$

La integral se resuelve mediante una descomposición polinómica:



$$\frac{x-1}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-3)}{x^2-9}$$

$$x-1 = A(x+3)+B(x-3)$$

$$\begin{cases} x=-3 \Longrightarrow 2 = 6A \Longrightarrow A = 1/3 \\ x=3 \Longrightarrow -4 = -6B \Longrightarrow B = 2/3 \end{cases}$$

$$\int \frac{x-1}{x^2-9}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x-3| + \frac{2}{3}\ln|x+3|$$