Problema 1 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-1}$, determina

a) Dominio

b) Puntos de corte con los ejes coordenados.

c) Signo de la función.

d) Simetrías.

e) Asíntotas.

f) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

g) Máximos y mínimos relativos.

h) Curvatura.

i) Puntos de Inflexión.

j) Tangente a la curva en el punto $x = 2$

k) Utiliza la información anterior para representarla gráficamente.

l) El área determinada por la gráfica de la curva, el eje OX y las rectas $x = -1/2$ y $x = 1/2$

Solución:

a) $Dom(f) = R - \{\pm 1\}$.

b) Los puntos de corte serán los siguientes:

Si $x = 0 \Longrightarrow (0,0)$ y si $f(x) = 0 \Longrightarrow (0,0)$.

c)

$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$

d) La función es IMPAR

e) Asíntotas:

- Verticales: Las únicas posibles son $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{2x^3}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{2x^3}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

y $x = -1$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{2x^3}{x^2-1} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{2x^3}{x^2-1} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x^3}{x^2-1} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x^3}{x^3-x} = 2$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2-1} - 2x\right) = 0$$

$$y = 2x$$

f) Monotonía:

$$f'(x) = \frac{2x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = \pm\sqrt{3} \Longrightarrow$$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Crece	Decrece	Crece

La función crece en el intervalo: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ y decrece en el intervalo: $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

g) Máximos y mínimos relativos: A la vista del apartado anterior, la función presenta Máximo en el punto $(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$ y un Mínimo en el punto $(\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$.

h) Curvatura:

$$f''(x) = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa	Cóncava	Convexa	Cóncava

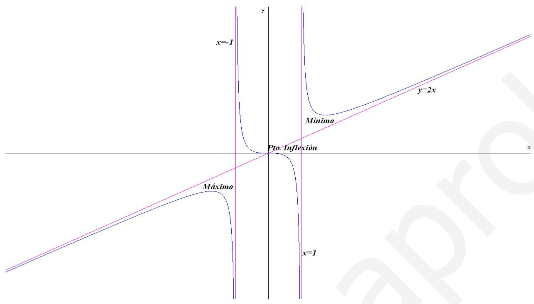
i) Hay un punto de Inflexión en $(0,0)$.

j) $a = 2 \Longrightarrow b = f(2) = 16/3$

$$m = f'(2) = 8/9 \Longrightarrow y - \frac{16}{3} = \frac{8}{9}(x-2), \text{ recta tangente}$$

$$y - \frac{16}{3} = -\frac{9}{8}(x-2), \text{ recta normal}$$

k) Representación gráfica:



l) Área:

$$\int \frac{2x^3}{x^2-1}\,dx = x^2 + \ln|x^2-1| + C$$

$$S_1 = \int_{-1/2}^{0} \frac{2x^3}{x^2-1}\,dx = -\frac{1}{4} - \ln\frac{3}{4} = 0,03768207245$$

$$S_2 = \int_{0}^{1/2} \frac{2x^2-8}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{4} + \ln\frac{3}{4} = -0,03768207245$$

$$S = |S_1| + |S_2| = -\frac{1}{2} - 2\ln\frac{3}{4} = 0,07536414490 \;\; u^2$$