Problema 1 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 1}$, determina

a) Dominio

b) Puntos de corte con los ejes coordenados.

c) Signo de la función.

d) Simetrías.

e) Asíntotas.

f) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

g) Máximos y mínimos relativos.

h) Curvatura.

i) Puntos de Inflexión.

j) Tangente a la curva en el punto $x = 2$

k) Utiliza la información anterior para representarla gráficamente.

l) El área determinada por la gráfica de la curva, el eje OX y las rectas $x = 3/2$ y $x = 3$

Solución:

a) $Dom(f) = R - \{\pm 1\}$.

b) Los puntos de corte serán los siguientes:

Si $x = 0 \Longrightarrow (0, 8)$ y si $f(x) = 0 \Longrightarrow (-2, 0)$ y $(2, 0)$.

c)

$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

d) La función es PAR

e) Asíntotas:

- Verticales: Las únicas posibles son $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{2x^2-8}{x^2-1} = \left[\frac{-6}{0^-}\right] = +\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{2x^2-8}{x^2-1} = \left[\frac{-6}{0^+}\right] = -\infty$$

y $x = -1$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} 2x^2 - 8x^2 - 1 = \left[\frac{-6}{0^+}\right] = -\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow -1^+} 2x^2 - 8x^2 - 1 = \left[\frac{-6}{0^-}\right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x^2-8}{x^2-1} = 2$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

f) Monotonía:

$$f'(x) = \frac{12x}{(x^2-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decrece	Crece

La función Decrece en el intervalo: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ y Crece en el intervalo: $(0, 1) \cup (1, \infty)$

g) Máximos y mínimos relativos: A la vista del apartado anterior, la función presenta un Mínimo en el punto $(0, 8)$.

h) Curvatura:

$$f''(x) = \frac{12(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} \neq 0$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	Convexa	Cóncava	Convexa

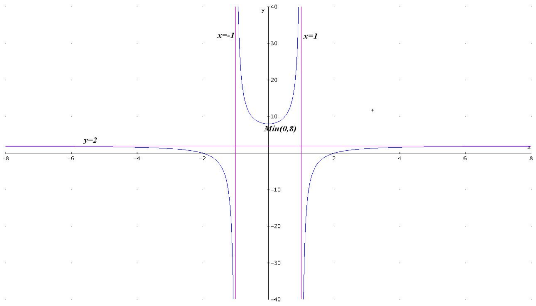
i) No hay puntos de Inflexión.

j) $a = 2 \Longrightarrow b = f(2) = 0$

$$m = f'(2) = 8/3 \Longrightarrow y = \frac{8}{3}(x-2), \text{ recta tangente}$$

$$y = -\frac{3}{8}(x-2), \text{ recta normal}$$

k) Representación gráfica:



l) Área:

$$\int \frac{2x^2-8}{x^2-1}\,dx = 2x + 3\ln|x+1| - 3\ln|x-1| + C$$

$$S_1 = \int_{3/2}^{2} \frac{2x^2-8}{x^2-1}\,dx = 1 - 3\ln\frac{5}{3} = -0,5324768712$$

$$S_2 = \int_{2}^{3} \frac{2x^2-8}{x^2-1}\,dx = 2 - 3\ln\frac{3}{2} = 0,7836046756$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 1 + 3\ln\frac{10}{9} = 1,316081546\ \ u^2$$