Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$$

Se pide:

a) Calcular su dominio.

b) Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.

c) Calcular su signo.

d) Calcular su simetría.

e) Calcular sus asíntotas.

f) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.

g) Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.

h) Representación gráfica.

i) Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 0$.

j) Calcular el área encerrada por la gráfica de f el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 0$.

Solución:

a) Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{1\}$

b) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + 3 = 0 \Longrightarrow$ No hay puntos de corte con OX.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -3 \Longrightarrow (0, -3)$.

c)

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
signo	$-$	$+$

d) $f(-x) \neq \pm f(x) \Longrightarrow$ la función no tiene simetrías.

e) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^2+3}{x-1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^2+3}{x-1} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x-1} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x^2-x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3}{x-1} - x\right) = 1$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x + 1$

f)

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 3$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-1, 1) \cup (1, 3)$.

La función tiene un máximo en el punto $(-1, -2)$ y un mínimo en $(3, 6)$.

g)

$$f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3} \neq 0$$

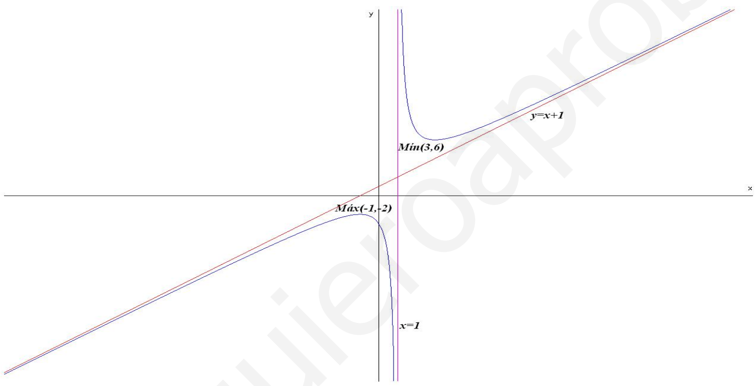
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

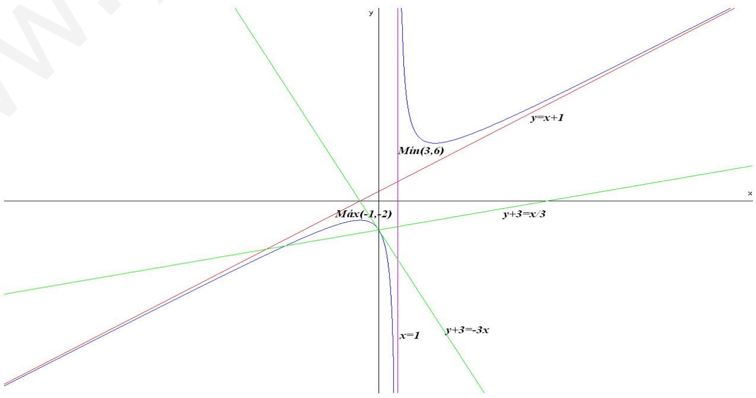
Cóncava: $(1,+\infty)$

Convexa: $(-\infty,1)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x=0$:
Como $m=f'(1)=-3$ tenemos que



$$\text{Recta Tangente}: \; y+3=-3x$$

$$\text{Recta Normal}: \ y+3=\frac{1}{3}x$$

Como $f(0)=-3$ las rectas pasan por el punto $(0,-3)$.

j)

$$\int_{-1}^{0}\frac{x^2+3}{x-1}\,dx=\left.\frac{x^2}{2}+x+4\ln|x-1|\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{2}-4\ln 2=-2,27$$

$$S=|\frac{1}{2}-4\ln 2|=4\ln 2-\frac{1}{2}=2,27\ u^2$$