Problema 1 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + a & \text{si} \quad x < 1 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Hallar a y b de manera que f cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Encontrar aquellos puntos que el teorema asegura su existencia.

Solución:

1. f es continua en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la continuidad en $x = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} x^2 + bx + a = 1 + b + a \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} ax^2 - bx + 3 = a - b + 3 \end{array} \right. \Longrightarrow b = 1$$

2. f es derivable en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la derivabilidad en $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + b & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ 2ax - b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(1^-) = 2 + b \\ f'(1^+) = 2a - b \end{array} \right. \Longrightarrow a - b = 1$$

3.

$$\left\{ \begin{array}{l} b = 1 \\ a - b = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \end{array} \right.$$

4. Tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x^2 - x + 3 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 4x - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en el $(0, 2)$. El Teorema afirma que existe al menos un punto $c \in (0, 2)$ que cumple

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{9 - 2}{2} = \frac{7}{2}.$$

Si cogemos la primera rama $x < 1$:

$$f'(c) = 2c + 1 = 7/2 \Longrightarrow c = 5/4 \notin (0, 1)$$

Si cogemos la segunda rama $x \geq 1$:

$$f'(c) = 4c - 1 = 7/2 \Longrightarrow c = 9/8 \in (1, 2)$$

El punto $c \in (0, 2)$ al que hace referencia el teorema será $c = 9/8$.

Problema 2 Hallar una función polinómica de tercer grado tal que tenga un extremo relativo en $(1, -1)$ y un punto de inflexión en $(0, 2)$

Solución:

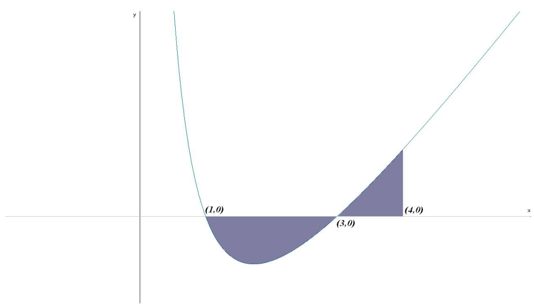
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\begin{cases} f(1) = -1 \Longrightarrow a + b + c + d = -1 \\ f(0) = 2 \Longrightarrow d = 2 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 3a + 2b + c = 0 \\ f''(0) = 0 \Longrightarrow 2b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 3/2 \\ b = 0 \\ c = -9/2 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{9}{2}x + 2,$$

Problema 3 Hallar el área encerrada por la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x}$ las rectas $x = 1$, $x = 4$ e $y = 0$.

Solución:



$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = 3$$

$$F(x) = \int \frac{x^2 - 4x + 3}{x}\, dx = \frac{x^2}{2} - 4x + 3 \ln |x|$$

$$S_1 = \int_1^3 f(x)\,dx = \left.\frac{x^2}{2} - 4x + 3\ln|x|\right]_1^3 = -4 + 3\ln 3$$

$$S_2 = \int_3^4 f(x)\,dx = \left.\frac{x^2}{2} - 4x + 3\ln|x|\right]_3^4 = -\frac{1}{2} + 3\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 4 - 3\ln 3 - \frac{1}{2} + 3\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{2} - 6\ln\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 1,067\,u^2$$

Problema 4 Calcular las integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{x^3+5}{x^2-x-2}\,dx$
2. $\displaystyle\int x\sin(2x)\,dx$

Solución:

1. $\displaystyle\int \frac{x^3+5}{x^2-x-2}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{13\ln(x-2)}{3} - \frac{\ln(x+1)}{3}$
2. $\displaystyle\int x\sin(2x)\,dx = \frac{\sin(2x) - 2x\cos(2x)}{4}$