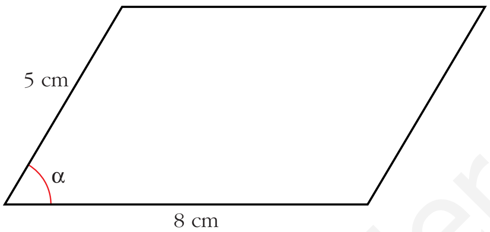
UNIDAD 5 VECTORES EN EL ESPACIO

Página 132

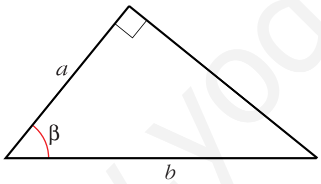
Problema 1

- **Halla el área de este paralelogramo en función del ángulo α:**



Área $= 8 \cdot 5$ *sen* $\alpha = 40$ *sen* α cm^2

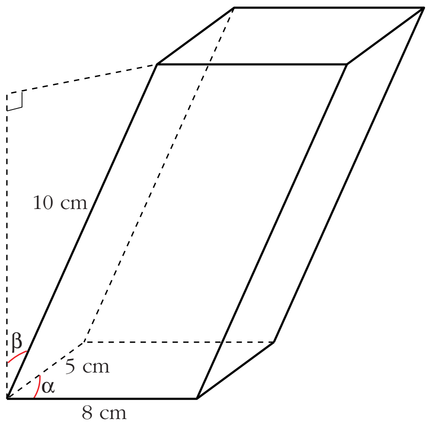
- **Halla el área de este triángulo en función del ángulo β:**



Área triángulo $= \dfrac{a\, b \text{ sen } \beta}{2}$ cm^2

Problema 2

- **Halla el volumen de este paralelepípedo en función de α y de β.**

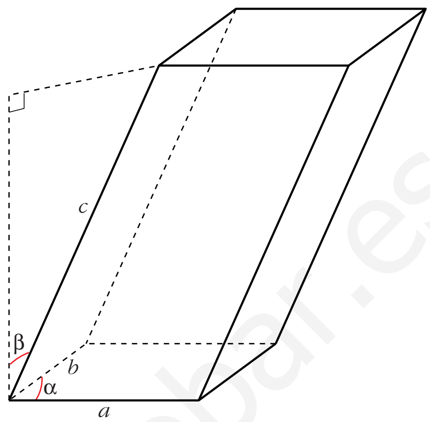


$\left.\begin{array}{l}\text{Área base} = 40 \text{ sen } \alpha \\ \text{Altura} = 10 \cos \beta\end{array}\right\}$

Volumen $= 400$ *sen* α *cos* β cm^3

Página 133

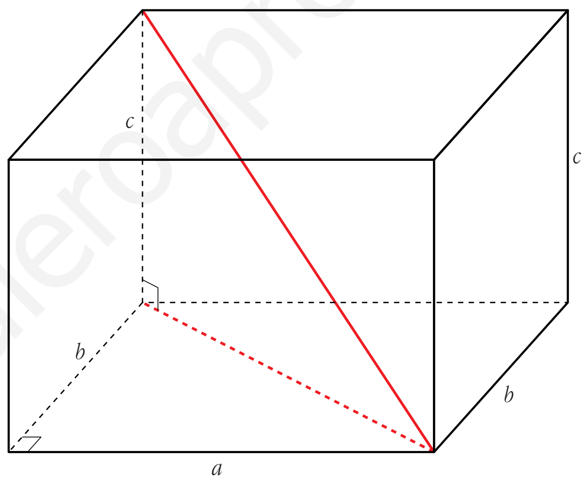
■ **¿Cuál será el volumen de un paralelepípedo de aristas *a*, *b*, *c*, tal que las dos aristas de la base formen entre sí un ángulo α, y las aristas laterales formen un ángulo β con la perpendicular?**



Volumen = $a\,b\,c\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\beta$

Problema 3

■ **Halla la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son: $c = 3$ cm, $b = 4$ cm y $a = 12$ cm.**



Diagonal = $\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} =$

$= \sqrt{169} = 13$ cm

■ **Escribe la expresión general de la diagonal de un ortoedro de aristas *a*, *b* y *c*.**

En general: Diagonal = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Página 135

1. **La propiedad $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$ relaciona el producto de números por vectores con el producto entre números.**

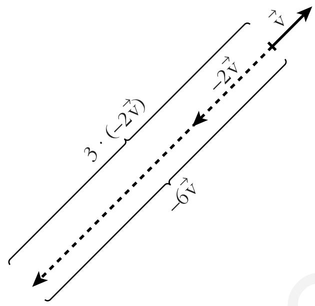
   a) De los cuatro productos que aparecen, ¿cuáles son del primer tipo y cuáles del segundo?

   b) Interpreta dicha propiedad para $a = 3$, $b = -2$ y $\vec{v}$ un vector cualquiera representado sobre el papel.

   a) Producto de números por vectores: $b \cdot \vec{v}$; $(a \cdot b) \cdot \vec{v}$; $a \cdot (b \cdot \vec{v})$

   Producto entre números: $a \cdot b$

b) $\left.\begin{array}{l} a \cdot (b \cdot \vec{v}) = 3 \cdot (-2\vec{v}) \\ (a \cdot b) \cdot \vec{v} = -6\vec{v} \end{array}\right\} \; 3 \cdot (-2\vec{v}) = -6\vec{v}$



2. **La propiedad $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$ relaciona la suma de números con la suma de vectores.**

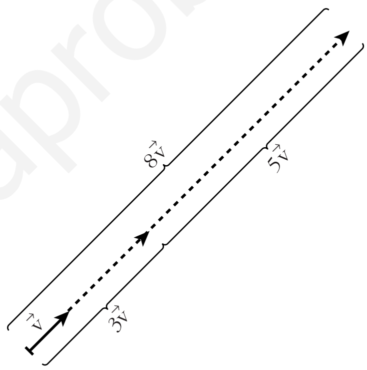
a) De las dos sumas que aparecen, ¿cuál es de cada tipo?

b) Interpreta dicha propiedad para $a = 3$, $b = 5$ y $\vec{v}$ un vector cualquiera representado sobre el papel.

a) Suma de números: $a + b$

Suma de vectores: $a\vec{v} + b\vec{v}$

b) $\left.\begin{array}{l} (a + b) \cdot \vec{v} = 8\vec{v} \\ a\vec{v} + b\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v} \end{array}\right\} \; 8\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v}$



Página 137

1. **Si $\vec{u}(-3, 5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, -2)$, halla las coordenadas:**

a) $2\vec{u}$ **b)** $0\vec{v}$ **c)** $-\vec{u}$

d) $2\vec{u} + \vec{v}$ **e)** $\vec{u} - \vec{v}$ **f)** $5\vec{u} - 3\vec{v}$

a) $2\vec{u} = 2 \cdot (-3, 5, 1) = (-6, 10, 2)$

b) $0 \cdot \vec{v} = (0, 0, 0)$

c) $-\vec{u} = -(-3, 5, 1) = (3, -5, -1)$

d) $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-3, 5, 1) + (7, 4, -2) = (1, 14, 0)$

e) $\vec{u} - \vec{v} = (-3, 5, 1) - (7, 4, -2) = (-10, 1, 3)$

f) $5\vec{u} - 3\vec{v} = 5(-3, 5, 1) -3(7, 4, -2) = (-36, 13, 11)$

2. **Sean los vectores $\vec{x}(1, -5, 2)$, $\vec{y}(3, 4, -1)$, $\vec{z}(6, 3, -5)$, $\vec{w}(24, -26, -6)$. Halla a, b, c para que se cumpla: $a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = \vec{w}$**

$$a(1, -5, 2) + b(3, 4, -1) + c(6, 3, -5) = (24, -26, -6)$$

$$(a + 3b + 6c, -5a + 4b + 3c, 2a - b - 5c) = (24, -26, -6)$$

$$\left.\begin{array}{r} a + 3b + 6c = 24 \\ -5a + 4b + 3c = -26 \\ 2a - b - 5c = -6 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -92$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 3 & 6 \\ -26 & 4 & 3 \\ -6 & -1 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-552}{-92} = 6; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 24 & 6 \\ -5 & -26 & 3 \\ 2 & -6 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{184}{-92} = -2$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 24 \\ -5 & 4 & -26 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-368}{-92} = 4$$

Solución: $a = 6$, $b = -2$, $c = 4$, es decir, $6\vec{x} - 2\vec{y} + 4\vec{z} = \vec{w}$.

Página 141

1. Dados los vectores $\vec{u}(5, -1, 2)$, $\vec{v}(-1, 2, -2)$, calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$ c) $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

d) Proy. de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y proy. de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

e) ¿Cuánto ha de valer x para que el vector $(7, 2, x)$ sea perpendicular a $\vec{u}$?

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5 - 2 - 4 = -11$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{25 + 1 + 4} = \sqrt{30} \approx 5{,}48$

$|\vec{v}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$

c) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \dfrac{-11}{\sqrt{30} \cdot 3} \approx -0{,}669 \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 132°\ 1'\ 26''$

d) Proy. de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{-11}{3} = -3{,}67$

Significa que el vector proyección de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$ tiene módulo 3,67 y sentido contrario al de $\vec{v}$.

Proy. de $\vec{v}$ sobre $\vec{u} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \dfrac{-11}{\sqrt{30}} \approx -2{,}008$

e) $(5, -1, 2) \cdot (7, 2, x) = 35 - 2 + 2x = 33 + 2x = 0 \rightarrow x = \dfrac{-33}{2}$

2. Obtén tres vectores perpendiculares a $\vec{v}$ que no sean paralelos entre sí: $\vec{v}(3, 2, 7)$

Un vector, $\vec{u}(x, y, z)$, es perpendicular a $\vec{v}(3, 2, 7)$ si: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3x + 2y + 7z = 0$

Por ejemplo: $(0, -7, 2)$; $(-7, 0, 3)$; $(-2, 3, 0)$

3. Halla un vector que sea perpendicular a los dos vectores dados:

$$\vec{u}\,(5, -1, 2) \qquad\qquad \vec{v}\,(-1, 2, -2)$$

Queremos hallar las coordenadas de un vector $\vec{w}(x, y, z)$ que sea perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{w} \perp \vec{u} \;\Rightarrow\; (5, -1, 2) \cdot (x, y, z) = 5x - y + 2z = 0 \\ \vec{w} \perp \vec{v} \;\Rightarrow\; (-1, 2, -2) \cdot (x, y, z) = -x + 2y - 2z = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones proporcionales. Una de ellas es $x = -2$, $y = 8$, $z = 9$.

Es decir, el vector buscado puede ser $(-2, 8, 9)$ o cualquier otro paralelo a él.

Página 144

1. Halla el producto vectorial de $\vec{u}\,(3, 7, -6)$ y $\vec{v}\,(4, 1, -2)$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 7, -6) \times (4, 1, -2) = (-8, -18, -25)$$

2. Halla un vector perpendicular a $\vec{u}\,(3, 7, -6)$ y a $\vec{v}\,(4, 1, -2)$.

$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 7, -6) \times (4, 1, -2) = (-8, -18, -25)$ o cualquier vector proporcional a él.

3. Halla el área del triángulo determinado por los vectores: $\vec{u}\,(3, 7, -6)$ y $\vec{v}\,(4, 1, -2)$

Área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(3, 7, -6) \times (4, 1, -2)| = |(-8, -18, -25)| =$$
$$= \sqrt{8^2 + 18^2 + 25^2} = \sqrt{1\,013}$$

Área del triángulo $= \dfrac{\sqrt{1\,013}}{2} \approx 15,91\ u^2$

Página 145

1. Halla el volumen del paralelepípedo definido por $\vec{u}(3, -5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, 2)$ y $\vec{w}(0, 6, 1)$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 53 \;\rightarrow\; \text{Volumen} = 53\ u^3$$

2. Halla el valor de x para que los vectores $\vec{u}(3, -5, 1)$, $\vec{v}(7, 4, 2)$ y $\vec{z}(1, 14, x)$ sean coplanarios (es decir, que el volumen del paralelepípedo determinado por ellos sea cero).

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 1 & 14 & x \end{vmatrix} = 47x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$$

Página 149

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Dependencia lineal

1 **Dados los vectores $\vec{u}(3, 3, 2)$, $\vec{v}(5, -2, 1)$, $\vec{w}(1, -1, 0)$:**

a) Halla los vectores $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$, $-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w}$.

b) Calcula a y b tales que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

a) $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w} = (3, 3, 2) - 2(5, -2, 1) + 3(1, -1, 0) = (-4, 4, 0)$

$-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w} = -2(3, 3, 2) + (5, -2, 1) - 4(1, -1, 0) = (-5, -4, -3)$

b) $(3, 3, 2) = a(5, -2, 1) + b(1, -1, 0) = (5a + b, -2a - b, a)$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = 5a + b \\ 3 = -2a - b \\ 2 = a \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} b = -7 \\ b = -7 \\ a = 2 \end{array}\right\} \textit{Solución: } a = 2,\ b = -7, \text{ es decir: } \vec{u} = 2\vec{v} - 7\vec{w}.$$

2 **Comprueba que no es posible expresar el vector $\vec{x}(3, -1, 0)$ como combinación lineal de $\vec{u}(1, 2, -1)$ y $\vec{v}(2, -3, 5)$. ¿Son linealmente independientes $\vec{x}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$?**

$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} \quad \rightarrow \quad (3, -1, 0) = a(1, 2, -1) + b(2, -3, 5)$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = a + 2b \\ -1 = 2a - 3b \\ 0 = -a + 5b \end{array}\right\} A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ Como } |A'| = 28 \neq 0, \text{ el sistema es incompatible.}$$

Luego **no** es posible expresar $\vec{x}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Como $ran\ (A') = 3$, los tres vectores son linealmente independientes.

3 **¿Cuáles de los siguientes vectores tienen la misma dirección?**

$\vec{a}(1, -3, 2)$ $\quad$ $\vec{b}(2, 0, 1)$ $\quad$ $\vec{c}(-2, 6, -4)$ $\quad$ $\vec{d}(5, -15, 10)$ $\quad$ $\vec{e}(10, -30, 5)$

$\vec{a}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$, pues sus coordenadas son proporcionales.

4 **Comprueba que cualquiera de los vectores $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(2, 1, 3)$, $\vec{c}(1, 0, 1)$ puede expresarse como C.L. de los otros dos.**

$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c} \quad \rightarrow \quad (1, 2, 3) = x(2, 1, 3) + y(1, 0, 1)$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 2x + y \\ 2 = x \\ 3 = 3x + y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = -3 \\ x = 2 \\ y = -3 \end{array}\right\} \text{Por tanto: } \vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$$

De aquí, también obtenemos que: $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{c}$; $\vec{c} = \frac{-1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

5 **Halla, en cada caso, todos los valores de m, n y p tales que $m\vec{u} + n\vec{v} + p\vec{w} = \vec{0}$:**

a) $\vec{u}(3, 0, 1)$, $\vec{v}(1, -1, 0)$, $\vec{w}(1, 0, 1)$

b) $\vec{u}(1, -1, 0)$, $\vec{v}(1, 1, 1)$, $\vec{w}(2, 0, 1)$

a) $m(3, 0, 1) + n(1, -1, 0) + p(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$

$$\left.\begin{aligned} 3m + n + p &= 0 \\ -n &= 0 \\ m + p &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = -2 \neq 0$, la única solución del sistema es: $m = 0$, $n = 0$, $p = 0$

(Luego $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes).

b) $m(1, -1, 0) + n(1, 1, 1) + p(2, 0, 1) = (0, 0, 0)$

$$\left.\begin{aligned} m + n + 2p &= 0 \\ -m + n &= 0 \\ n + p &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$; luego $ran\ (A) = 2$.

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} -m + n &= 0 \\ n + p &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} m &= n \\ p &= -n \end{aligned}\right\} \quad \textit{Soluciones:}\ m = \lambda,\ n = \lambda,\ p = -\lambda$$

6 **S** **Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:**

a) $\vec{u}(1, 2, 1)$, $\vec{v}(-1, 0, 3)$, $\vec{w}(1, 2, -1)$

b) $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(1, 4, 11)$, $\vec{c}(1, 1, -1)$, $\vec{d}(0, 1, 4)$

c) $\vec{u}(1, 1, 0)$, $\vec{v}(1, 0, 1)$, $\vec{w}(5, 2, 3)$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Luego $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ son **linealmente independientes**.

b) Al ser cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$, son **linealmente dependientes**.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Por tanto, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ son **linealmente dependientes.**

7 **S** **Determina k para que los siguientes conjuntos de vectores sean linealmente dependientes:**

a) $\vec{u}(k, -3, 2)$, $\vec{v}(2, 3, k)$, $\vec{w}(4, 6, -4)$

b) $\vec{u}(3, 2, 5)$, $\vec{v}(2, 4, 7)$, $\vec{w}(1, -1, k)$

a) $\begin{vmatrix} k & -3 & 2 \\ 2 & 3 & k \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -6k^2 - 24k - 24 = -6(k^2 + 4k + 4) = -6(k + 2)^2 = 0 \;\rightarrow\; k = -2$

Si $k = -2$, los vectores son linealmente dependientes.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = 8k + 5 = 0 \;\rightarrow\; k = \dfrac{-5}{8}$

Si $k = \dfrac{-5}{8}$, los vectores son linealmente dependientes.

8
S **¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son una base?**

$\boldsymbol{A = \{(1, 2, 1),\ (1, 0, 1),\ (2, 2, 2)\}}$

$\boldsymbol{B = \{(1, 1, 1),\ (1, 0, 1),\ (1, 1, 0),\ (0, 0, 1)\}}$

$\boldsymbol{C = \{(-3, 2, 1),\ (1, 2, -1),\ (1, 0, 1)\}}$

$A = \{(1, 2, 1),\ (1, 0, 1),\ (2, 2, 2)\}$

Como $(2, 2, 2) = (1, 2, 1) + (1, 0, 1)$, los vectores son linealmente dependientes. Por tanto, **no** son una base.

$B = \{(1, 1, 1),\ (1, 0, 1),\ (1, 1, 0),\ (0, 0, 1)\}$

Al ser cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$, son dependientes, luego **no** son una base.

$C = \{(-3, 2, 1),\ (1, 2, -1),\ (1, 0, 1)\}$

$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \;\rightarrow\;$ Los vectores son linealmente independientes.

Un conjunto de tres vectores de $\mathbb{R}^3$, linealmente independientes, son una **base** de $\mathbb{R}^3$.

9
S **¿Para qué valores de $\boldsymbol{a}$ el conjunto de vectores $\boldsymbol{S = \{(1, 1, 1),\ (a, 1, 1),\ (1, a, 0)\}}$ es una base?**

Como son tres vectores de $\mathbb{R}^3$, formarán base cuando sean linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = a^2 - a = a(a - 1) = 0 \;\begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Por tanto, S es una base cuando $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

Producto escalar

10 **En una base ortonormal tenemos $\boldsymbol{\vec{a}(1, 2, 2)}$ y $\boldsymbol{\vec{b}(-4, 5, -3)}$. Calcula:**

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ **b)** $|\vec{a}|$ **y** $|\vec{b}|$ **c)** $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ **d) La proyección de** $\vec{b}$ **sobre** $\vec{a}$**.**

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 2) \cdot (-4, 5, -3) = -4 + 10 - 6 = 0$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$

c) Como $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \;\rightarrow\; (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90°$

d) Proyeccción de $\vec{b}$ sobre $\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = 0$

11 **Dados los vectores: $\vec{a} = \vec{i} + m\,\vec{j} + k$ y $\vec{b} = -2\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + m\,\vec{k}$, halla m para que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean:**

a) Paralelos. b) Ortogonales.

$\vec{a}(1, m, 1)$ $\vec{b}(-2, 4, m)$

a) $\dfrac{-2}{1} = \dfrac{4}{m} = \dfrac{m}{1} \;\rightarrow\; m = -2$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, m, 1) \cdot (-2, 4, m) = -2 + 4m + m = 5m - 2 = 0 \;\rightarrow\; m = \dfrac{2}{5}$

12 **Halla la proyección del vector $\vec{u}(3, 1, 2)$ sobre el vector $\vec{v}(1, -1, 2)$.**

Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{3 - 1 + 4}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$

13 **¿Son $\vec{a}(1, 2, 3)$ y $\vec{b}(2, -2, 1)$ ortogonales? Si no lo son, halla el ángulo que forman.**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 3) \cdot (2, -2, 1) = 2 - 4 + 3 = 1 \neq 0 \;\rightarrow$ **no** son ortogonales.

Si llamamos α al ángulo que forman, entonces:

$\cos \alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\;|\vec{b}|} = \dfrac{1}{\sqrt{14}\,\sqrt{9}} \approx 0{,}089 \;\rightarrow\; \alpha = 84°\ 53'\ 20''$

14 **Calcula m para que el vector $\vec{a}(1, 3, m)$ sea ortogonal al vector $\vec{b}(1, -2, 3)$.**

$\vec{a} \perp \vec{b} \;\rightarrow\; \vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 3, m) \cdot (1, -2, 3) = 1 - 6 + 3m = 3m - 5 = 0 \;\rightarrow\; m = \dfrac{5}{3}$

15 **Comprueba que el vector $\vec{u}(1/2, 1/2, 0)$ no es unitario y da las coordenadas de un vector unitario de la misma dirección que $\vec{u}$.**

$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \neq 1 \;\rightarrow\; \vec{u}$ **no** es unitario.

Un vector unitario de la misma dirección que $\vec{u}$ sería:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right). \text{ También podría ser } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

Producto vectorial

16 Dados $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, comprueba que los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$ son opuestos, y halla su módulo.

$\vec{u}(2, -1, 1)$ $\vec{v}(-1, 3, 2)$

$\vec{u} \times \vec{v} = (-5, -5, 5);$ $\vec{v} \times \vec{u} = (5, 5, -5) = -\vec{u} \times \vec{v}$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 5^2} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3} \approx 8,66$

17 Halla el área del paralelogramo que forman los vectores $\vec{a}(7, -1, 2)$ y $\vec{b}(1, 4, -2)$.

Área $= |\vec{a} \times \vec{b}| = |(-6, 16, 29)| = \sqrt{(-6)^2 + 16^2 + 29^2} = \sqrt{1\,133} \approx 33,66$ u^2

18 Halla un vector perpendicular a $\vec{u}(2, 3, 1)$ y a $\vec{v}(-1, 3, 0)$ y que sea unitario.

$\vec{u} \times \vec{v} = (-3, -1, 9)$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 9^2} = \sqrt{91}$

Luego el vector que buscamos es: $\left(\frac{-3}{\sqrt{91}}, \frac{-1}{\sqrt{91}}, \frac{9}{\sqrt{91}}\right)$

19 Halla un vector ortogonal a $\vec{u}(1, -1, 0)$ y $\vec{v}(2, 0, 1)$ y cuyo módulo sea $\sqrt{24}$.

$\vec{u} \times \vec{v} = (-1, -1, 2) \quad \to \quad |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{6} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{24}}{2}$

El vector que buscamos será: $2(-1, -1, 2) = (-2, -2, 4)$

Producto mixto

20 Halla $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ en los siguientes casos:

a) $\vec{u}(1, -3, 2)$, $\vec{v}(1, 0, -1)$, $\vec{w}(2, 3, 0)$

b) $\vec{u}(3, 2, 1)$, $\vec{v}(1, -2, 0)$, $\vec{w}(-4, 1, 1)$

c) $\vec{u}(1, 2, -1)$, $\vec{v}(3, 0, 2)$, $\vec{w}(-1, 4, -4)$

a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 15$

b) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15$ c) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$

Página 150

21 **Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}(1, 2, 3)$, $\vec{v}(-2, 1, 0)$ y $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.**

$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 2, 3) \times (-2, 1, 0) = (-3, -6, 5)$

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 70 \rightarrow$ Volumen = 70 u^3

22 **Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{a}(3, -1, 1)$, $\vec{b}(1, 7, 2)$ y $\vec{c}(2, 1, -4)$.**

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -111 \rightarrow$ Volumen = 111 u^3

23
S **Calcula el valor de m para que $\vec{u}(2, -3, 1)$, $\vec{v}(1, m, 3)$ y $\vec{w}(-4, 5, -1)$ sean coplanarios.**

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2m + 8 = 0 \rightarrow m = -4$

PARA RESOLVER

24
S **Prueba que los vectores $(1, a, b)$, $(0, 1, c)$, $(0, 0, 1)$, son linealmente independientes cualesquiera que sean a, b y c.**

$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ para cualquier valor de a, b, c. Por tanto, son linealmente independientes.

25 **Dados los vectores $\vec{a}(1, 2, -1)$ y $\vec{b}(1, 3, 0)$, comprueba que el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a} + \vec{b}$ y a $\vec{a} - \vec{b}$.**

$\vec{a} \times \vec{b} = (3, -1, 1)$

$\vec{a} + \vec{b} = (2, 5, -1)$

$\vec{a} - \vec{b} = (0, -1, -1)$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (3, -1, 1) \cdot (2, 5, -1) = 6 - 5 - 1 = 0$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = (3, -1, 1) \cdot (0, -1, -1) = 1 - 1 = 0$

Por tanto, $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a} + \vec{b}$ y a $\vec{a} - \vec{b}$.

26 **a) Comprueba que el paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}(3, -2, 1)$ y $\vec{v}(4, 3, -6)$ es un rectángulo.**

b) Halla su área multiplicando la base por la altura y comprueba que obtienes el mismo resultado si hallas $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -2, 1) \cdot (4, 3, -6) = 12 - 6 - 6 = 0$. Luego $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, y el paralelogramo es un rectángulo.

b) $\left.\begin{array}{l} \text{Base} = |\vec{u}| = \sqrt{14} \\ \text{Altura} = |\vec{v}| = \sqrt{61} \end{array}\right\}$ $\text{Área} = \sqrt{854} \approx 29{,}22 \text{ u}^2$

Por otra parte:

$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(9, 22, 17)| = \sqrt{854} \approx 29{,}22 \text{ u}^2$

27 **Dado el vector $\vec{v}(-2, 2, -4)$, halla las coordenadas de los siguientes vectores:**

a) Unitarios y de la misma dirección que $\vec{v}$.

b) Paralelos a $\vec{v}$ y de módulo 6.

$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

a) $\left(\dfrac{-2}{2\sqrt{6}}, \dfrac{2}{2\sqrt{6}}, \dfrac{-4}{2\sqrt{6}}\right) = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{-2}{\sqrt{6}}\right) = \left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{6}, -\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ y $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}, -\dfrac{\sqrt{6}}{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

b) $\left(\dfrac{-6}{\sqrt{6}}, \dfrac{6}{\sqrt{6}}, \dfrac{-12}{\sqrt{6}}\right)$ y $\left(\dfrac{6}{\sqrt{6}}, \dfrac{-6}{\sqrt{6}}, \dfrac{12}{\sqrt{6}}\right)$

28 **Halla un vector ortogonal a $\vec{u}(2, 3, -1)$ y a $\vec{v}(1, 4, 2)$ cuya tercera componente sea 1.**

$\vec{u} \times \vec{v} = (10, -5, 5) \;//\; (2, -1, 1)$

El vector que buscamos es $(2, -1, 1)$.

29 **S** **Dados los vectores $\vec{u}_1(2, 0, 0)$, $\vec{u}_2(0, 1, -3)$, $\vec{u}_3 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$, ¿qué relación deben cumplir a y b para que $\vec{u}_3$ sea ortogonal al vector $\vec{v}(1, 1, 1)$?**

$\vec{u}_3 = a(2, 0, 0) + b(0, 1, -3) = (2a, b, -3b)$

Para que $\vec{u}_3$ sea perpendicular a $\vec{v}$ ha de ser:

$\vec{u}_3 \cdot \vec{v} = (2a, b, -3b) \cdot (1, 1, 1) = 2a + b - 3b = 2a - 2b = 0$, es decir, $a = b$.

30 **S** **Calcula las coordenadas de un vector $\vec{u}$ que sea ortogonal a $\vec{v}(1, 2, 3)$ y $\vec{w}(1, -1, 1)$ y tal que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 19$.**

$\vec{v} \times \vec{w} = (5, 2, -3)$

Un vector ortogonal a $\vec{v}$ y a $\vec{w}$ es de la forma $(5k, 2k, -3k)$.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 5k & 2k & -3k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \cdot 38 = 19 \quad \to \quad k = \frac{1}{2}$$

Por tanto: $\vec{u}\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{-3}{2}\right)$

31 **Dados los vectores $\vec{a}(1, -2, 3)$, $\vec{b}(3, 1, 1)$, $\vec{c}(-2, 0, 1)$, comprueba que:**

a) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

a) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (1, -2, 3) \times (1, 1, 2) = (-7, 1, 3)$

$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = (-5, 8, 7) + (-2, -7, -4) = (-7, 1, 3)$

b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (-5, 8, 7) \times (-2, 0, 1) = (8, -9, 16)$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (1, -2, 3) \times (1, -5, 2) = (11, 1, -3)$

32 S **a) Obtén λ para que los siguientes vectores sean linealmente dependientes:**

$\vec{u}_1 = (3, 2, 5)$, $\vec{u}_2 = (2, 4, 7)$, $\vec{u}_3 = (1, -3, \lambda)$

b) Para $\lambda = 3$, expresa el vector $\vec{v} = (7, 3, 15)$ como combinación lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 8\lambda + 27 = 0 \quad \to \quad \lambda = \frac{-27}{8}$

b) Para $\lambda = 3$, tenemos que: $\vec{u}_1(3, 2, 5)$ $\vec{u}_2(2, 4, 7)$ $\vec{u}_3(1, -3, 3)$

Expresamos $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$:

$(7, 3, 15) = a(3, 2, 5) + b(2, 4, 7) + c(1, -3, 3)$

$$\left.\begin{aligned} 3a + 2b + c &= 7 \\ 2a + 4b - 3c &= 3 \\ 5a + 7b + 3c &= 15 \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 51$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 15 & 7 & 3 \end{vmatrix}}{51} = \frac{84}{51} = \frac{28}{17}; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 5 & 15 & 3 \end{vmatrix}}{51} = \frac{30}{51} = \frac{10}{17}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 15 \end{vmatrix}}{51} = \frac{45}{51} = \frac{15}{17}$$

Por tanto: $\vec{v} = \frac{28}{17}\vec{u}_1 + \frac{10}{17}\vec{u}_2 + \frac{15}{17}\vec{u}_3$

33 S **a) Comprueba que los vectores $\vec{b}_1 = 1/2(\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j})$, $\vec{b}_2 = 1/2(\sqrt{3}\,\vec{i} - \vec{j})$ y $\vec{b}_3 = \vec{k}$ son los de una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, siendo $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ y $\vec{k} = (0, 0, 1)$.**

b) Halla las coordenadas de $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ respecto a la base $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.

a) $|\vec{b}_1| = \dfrac{1}{2}\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4} = \dfrac{2}{2} = 1$

$|\vec{b}_2| = \dfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4} = 1$

$|\vec{b}_3| = 1$

$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \dfrac{1}{4}(\sqrt{3} - \sqrt{3}) = 0$

$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = 0$

$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = 0$

Por tanto $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

b) $(1, 1, 1) = x\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) + y\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1}{2}, 0\right) + z(0, 0, 1)$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y = 1 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y = 1 \\ z = 1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + \sqrt{3}y = 2 \\ \sqrt{3}x - \quad y = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} x + \sqrt{3}y = 2 \\ 3x - \sqrt{3}y = 2\sqrt{3} \\ \hline 4x \qquad = 2 + 2\sqrt{3} \end{array}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \qquad y = \sqrt{3}x - 2 = \frac{\sqrt{3} + 3}{2} - 2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

Por tanto:

$$\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\vec{b}_1 + \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\vec{b}_2 + \vec{b}_3, \text{ es decir:}$$

$$\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, 1\right)$$

34 S **a) Determina los valores de a para los que resultan linealmente dependientes los vectores $(-2, a, a)$, $(a, -2, a)$ y $(a, a, -2)$.**

b) Obtén en esos casos una relación de dependencia entre los vectores.

a) $\begin{vmatrix} -2 & a & a \\ a & -2 & a \\ a & a & -2 \end{vmatrix} = 2a^3 + 6a^2 - 8 = 2(a - 1)(a + 2)^2 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$

Para $a = 1$ y para $a = -2$, los tres vectores dados son linealmente dependientes.

b) Para $a = 1$, queda: $(-2, 1, 1)$, $(1, -2, 1)$, $(1, 1, -2)$, y tenemos que:

$$-1 \cdot (-2, 1, 1) - 1 \cdot (1, -2, 1) = (1, 1, -2)$$

Para $a = -2$, queda: $(-2, -2, -2)$, $(-2, -2, -2)$, $(-2, -2, -2)$, y tenemos que:

$$-1 \cdot (-2, -2, -2) + 0 \cdot (-2, -2, -2) = (-2, -2, -2)$$

35 S **Dados los vectores $\vec{u}(1, -1, 2)$ y $\vec{v}(3, 1, -1)$, halla el conjunto de vectores que, siendo perpendiculares a $\vec{u}$, sean coplanarios con $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

Sea $\vec{w}(x, y, z)$ un vector tal que:

1º) Es perpendicular a $\vec{u}$, es decir:

$$(x, y, z) \cdot (1, -1, 2) = x - y + 2z = 0$$

2º) Es coplanario con $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -x + 7y + 4z = 0$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x - y + 2z &= 0 \\ -x + 7y + 4z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + 2z &= y \\ -x + 4z &= -7y \end{aligned}\right\} \text{ Sumando: } \begin{aligned} &6z = -6y \;\to\; z = -y \\ &x = y - 2z = y + 2y = 3y \end{aligned}$$

Soluciones: $(3\lambda, \lambda, -\lambda)$ $\lambda \neq 0$

36 S **Dados los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ tales que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 4$ y $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, calcula la suma de los productos escalares $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + + \vec{a} \cdot \vec{c}$.**

Como $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \;\to\; |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 0 \;\to$

$\to\; (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0 \;\to$

$\to\; (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} =$

$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}) = 26 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}) = 0$

Por tanto: $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} = -13$

37 S **Dados los vectores $\vec{u}(a, 1 + a, 2a)$, $\vec{v}(a, 1, a)$ y $\vec{w}(1, a, 1)$, se pide:**

a) Halla los valores de a para los que los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

b) Estudia si el vector $\vec{c}(3, 3, 0)$ depende linealmente de $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $a = 2$.

c) Justifica razonadamente si para $a = 0$ se cumple la igualdad $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$.

a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a & 1+a & 2a \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^3 - a = a(a^2-1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

b) Para $a = 2$, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes. Como son tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes, forman una base de $\mathbb{R}^3$. Así, cualquier otro vector, y, en particular $\vec{c}(3, 3, 0)$, depende linealmente de ellos.

Obtenemos la combinación lineal:

Para $a = 2$, tenemos que: $\vec{u}(2, 3, 4)$, $\vec{v}(2, 1, 2)$, $\vec{w}(1, 2, 1)$

$(3, 3, 0) = x(2, 3, 4) + y(2, 1, 2) + z(1, 2, 1)$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ 4x + 2y + z = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

Por tanto: $\vec{c} = \frac{-3}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} + 3\vec{w}$

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ para $a = 0$. Está probado en el apartado a).

38 S **a) Halla el número de vectores linealmente independientes que hay en el conjunto $S = \{(1, 1, 1), (0, 2, 1), (2, 0, -3), (-1, 1, 2)\}$.**

b) Un vector no nulo tiene sus tres componentes iguales. ¿Puede escribirse como combinación lineal de los dos primeros vectores de S?

c) Determina un vector que, teniendo sus dos primeras componentes iguales a 1, se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de S.

a) Tenemos que hallar el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Como} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0, \quad ran\ (M) = 3.$$

Por tanto, hay tres vectores linealmente independientes en S.

b) Sí. Si tiene sus tres componentes iguales y es no nulo, es de la forma: $\vec{u} = (k, k, k)$ con $k \neq 0$. Entonces, podemos obtenerlo a partir de los dos primeros vectores de S como sigue:

$\vec{u} = k \cdot (1, 1, 1) + 0 \cdot (0, 2, 1)$

c) Sea $\vec{v}(1, 1, x)$ el vector que buscamos. Para que se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de S, tenemos que:

$(1, 1, x) = a(0, 2, 1) + b(2, 0, -3)$

$$\left.\begin{array}{l} 2b = 1 \\ 2a = 1 \\ a - 3b = x \end{array}\right\} \text{ Debe tener solución: } \begin{array}{l} b = \frac{1}{2},\ a = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = x \ \rightarrow\ x = \frac{-2}{2} = -1 \ \rightarrow\ x = -1 \end{array}$$

Por tanto, el vector es $\vec{v}(1, 1, -1)$.

Página 151

39 S **Halla un vector $\vec{u}$ de la misma dirección que $\vec{v}(1, -2, 3)$ y tal que forme con $\vec{w}(-2, 4, -1)$ un paralelogramo de área 25 u^2.**

Si $\vec{u}$ es de la misma dirección que $\vec{v}(1, -2, 3)$, será de la forma $\vec{u}(x, -2x, 3x)$, con $x \neq 0$.

Para que forme con $\vec{w}(-2, 4, -1)$ un paralelogramo de área 25 u^2, ha de ser:

$|\vec{u} \times \vec{w}| = |(-10x, -5x, 0)| = \sqrt{100x^2 + 25x^2} = |x|\sqrt{125} = 25;$

es decir: $125x^2 = 625 \ \rightarrow\ x^2 = 5 \ \rightarrow\ x = \pm\sqrt{5}$

Por tanto, hay dos soluciones: $(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$ y $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$

40 S **Halla un vector $\vec{v}$ coplanario con $\vec{a}(2, -1, 1)$ y $\vec{b}(1, 0, 3)$ y ortogonal a $\vec{c}(2, 3, 0)$.**

Sea $\vec{v}(x, y, z)$ tal que:

1º) es coplanario con $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es decir:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3x - 5y + z = 0$$

2º) es ortogonal a $\vec{c}$, es decir: $(x, y, z) \cdot (2, 3, 0) = 2x + 3y = 0$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} -3x - 5y + z = 0 \\ 2x + 3y \qquad = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -3x + z = 5y \\ 2x \qquad = -3y \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 5y + 3x = 5y - \frac{9}{2}y = \frac{1}{2}y \\ x = -\frac{3}{2}y \end{array}$$

Soluciones: $(-3\lambda, 2\lambda, \lambda)$ $(\lambda \neq 0)$

Todos los vectores de esta forma cumplen las condiciones. Por ejemplo, para $\lambda = 1$, tenemos el vector $(-3, 2, 1)$.

41 S **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que $|\vec{a}| = 4$ y $|\vec{b}| = 2$, con $(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$. Calcula $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.**

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) =$$

$$= 16 + 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 60° = 16 + 4 + 8 = 28 \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

Por otra parte:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) =$$

$$= 16 + 4 - 8 = 12 \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

42 S **De dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabemos que son ortogonales y que $|\vec{u}| = 6$ y $|\vec{v}| = 10$. Halla $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$.**

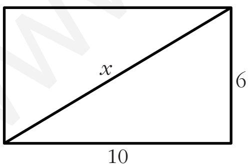
Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Así:

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 0 = 36 + 100 = 136 \rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11{,}66$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 136 \rightarrow |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11{,}66$$

Observación: Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, entonces forman los lados de un rectángulo con base y altura $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$. En este caso, $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son sus diagonales, que tienen el mismo módulo (por tratarse de un rectángulo). Además, para hallar la longitud de la diagonal, podemos aplicar en este caso el teorema de Pitágoras:



$$x^2 = 10^2 + 6^2 \rightarrow x^2 = 136 \rightarrow x = \sqrt{136} \approx 11{,}66$$

43 S **Calcula el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabiendo que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ y $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$.**

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 9 + 25 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) =$$

$$= 34 + 30 \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 7^2 = 49$$

Por tanto: $cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{49-34}{30} = \dfrac{15}{30} = \dfrac{1}{2} \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$

44 **De los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, sabemos que cumplen $\vec{u} + \vec{v} = \vec{a}$, $2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b}$, siendo $\vec{a}(2, -1, 0)$ y $\vec{b}(1, 3, -1)$. Halla el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

$$\left.\begin{array}{r} \vec{u} + \vec{v} = \vec{a} \\ 2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 3\vec{u} + 3\vec{v} = 3\vec{a} \\ 2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b} \\ \hline 5\vec{u} \qquad = 3\vec{a} + \vec{b} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{a} \\ -2\vec{u} + 3\vec{v} = -\vec{b} \\ \hline 5\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} \end{array}$$

$$\vec{u} = \frac{1}{5}(3\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{5}(7, 0, -1) = \left(\frac{7}{5}, 0, \frac{-1}{5}\right)$$

$$\vec{v} = \frac{1}{5}(2\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{5}(3, -5, 1) = \left(\frac{3}{5}, -1, \frac{1}{5}\right)$$

Por tanto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{7}{5}, 0, \frac{-1}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}, -1, \frac{1}{5}\right) = \frac{20}{5} = \frac{4}{5}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{-1}{5}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + (-1)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{35}{25}} = \sqrt{\frac{35}{5}}$$

$$cos\,(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{4/5}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{35/5}} = \frac{4}{\sqrt{70}} \approx 0{,}478 \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 61°\ 26'\ 21''$$

CUESTIONES TEÓRICAS

45 **Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, ¿podemos asegurar que $\vec{v} = \vec{w}$?**

No. Por ejemplo, si $\vec{u}(3, -2, 0)$, $\vec{v}(5, 1, 0)$ y $\vec{w}(7, 4, 0)$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = 15 - 2 = 13 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 21 - 8 = 13 \end{array}\right\} \ \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Sin embargo, $\vec{v} \neq \vec{w}$.

46 **Prueba, utilizando el producto escalar, que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp \vec{c}$ entonces $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$.**

$\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \qquad \vec{a} \perp \vec{c} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

Para demostrar que $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$, tenemos que probar que su producto escalar es cero:

$\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m\vec{a} \cdot \vec{b} + n\vec{a} \cdot \vec{c} = m \cdot 0 + n \cdot 0 = 0$

Por tanto $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$.

47 **Demuestra que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores no nulos que tienen el mismo módulo, entonces $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son ortogonales.**

Supongamos que $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$, entonces:

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$ (pues $|\vec{a}| = |\vec{b}|$)

Observación: Si recordamos que $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son las diagonales del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$, hemos probado que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

48 **Demuestra que si $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, también lo son los vectores $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{w}$ y $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$.**

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, entonces, si hacemos una combinación lineal de ellos y la igualamos a cero, $a_1\vec{u} + a_2\vec{v} + a_3\vec{w} = \vec{0}$, necesariamente han de ser $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Veamos que sucede lo mismo con los vectores $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{w}$ y $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$. Consideramos una combinación lineal de ellos igualada a cero:

$x(\vec{u} + \vec{v}) + y(\vec{u} - \vec{w}) + z(\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) = \vec{0}$, entonces:

$(x + y + z)\vec{u} + (x - z)\vec{v} + (-y + z)\vec{w} = \vec{0}$

Como $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ x \qquad - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{array}\right\} \text{ Pero } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

luego la única solución del sistema es la solución trivial $x = y = z = 0$.

Por tanto, los vectores $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{w}$ y $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ son linealmente independientes.

49 **Justifica que cualquier conjunto de vectores que contenga al vector nulo es L.D.**

Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n, \vec{0}\}$ un conjunto de $n + 1$ vectores que contiene el vector nulo. Si hacemos una combinación lineal de estos vectores e igualamos a cero:

(*) $x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n + x_{n+1}\vec{0} = \vec{0}$

tenemos infinitas soluciones para $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$; pues todas las soluciones de la forma $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = (0, 0, \dots, 0, \lambda)$ satisfacen la igualdad (*).

Por tanto, son linealmente dependientes.

50 **a) ¿Puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$?**

b) Si dos vectores verifican $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|$, ¿qué puedes decir del ángulo que forman?

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 1 \cdot 2 \cdot cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 2\,cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -3 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\frac{3}{2} > 1$ Imposible.

Luego no existen dos vectores que cumplan estas condiciones.

b) Si $|\vec{u}|\,|\vec{v}| = |\vec{u} \cdot \vec{v}| \;\rightarrow\; |\vec{u}|\,|\vec{v}| = \begin{cases} +\,|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \\ -\,|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \end{cases} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} |\vec{u}|\,|\vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \;\rightarrow\; cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 1 \;\rightarrow\; (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0° \\ |\vec{u}|\,|\vec{v}| = -|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \;\rightarrow\; cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -1 \;\rightarrow\; (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 180° \end{cases}$$

Por tanto, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

51 **Justifica por qué el producto mixto de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} + \vec{b}$ es igual a 0 cualesquiera que sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$.**

Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} + \vec{b}$ son coplanarios; luego el volumen del paralelepípedo determinado por ellos (que coincide con su producto mixto en valor absoluto) es cero.

52 **Si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ siendo $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$, ¿cómo son entre sí los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$?**

Sabemos que $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$. Si $|\vec{u} \times \vec{v}| = 0$, $|\vec{u}| \neq 0$ y $|\vec{v}| \neq 0$, entonces ha de ser $sen\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$. Es decir, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ será 0° ó 180°.

Por tanto, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tendrán la misma dirección.

53 **Si $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$, ¿es $\vec{b} = \vec{c}$ necesariamente? Pon ejemplos.**

No. Por ejemplo, si consideramos $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(2, 4, 6)$ y $\vec{c}(3, 6, 9)$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \\ \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0} \end{array}\right\} \rightarrow\; \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}, \text{ pero } \vec{b} \neq \vec{c}.$$

54
S **Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tres vectores linealmente independientes. Indica razonadamente cuál o cuáles de los siguientes productos mixtos valen 0:**

$$[\vec{a} + \vec{c},\; \vec{a} - \vec{c},\; \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}],\quad [\vec{a} + \vec{c},\; \vec{b},\; \vec{a} + \vec{b}],\quad [\vec{a} - \vec{c},\; \vec{b} - \vec{c},\; \vec{c} - \vec{a}]$$

Si $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ son tres vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$, forman una base. Así, las coordenadas respecto a esta base de los vectores $\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{a}-\vec{c}$ y $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ son: $(1, 0, 1)$, $(1, 0, -1)$ y $(1, 1, 1)$, respectivamente.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\to\;$ Son linealmente independientes $\to$

$\to\; [\vec{a}+\vec{c},\; \vec{a}-\vec{c},\; \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}] \neq 0$

Análogamente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \;\to\; [\vec{a}+\vec{c},\; \vec{b},\; \vec{a}+\vec{b}] \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\to\; [\vec{a}-\vec{c},\; \vec{b}-\vec{c},\; \vec{c}-\vec{a}] = 0$$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

55 Las tres alturas, AH_A BH_B CH_C de un triángulo ABC se cortan en un punto.

Hay una bonita forma de demostrarlo por geometría elemental.

El triángulo $A'B'C'$ está formado con los lados paralelos a los de ABC. Los vértices de este son los puntos medios de aquel. Por tanto, AH_A, BH_B y CH_C son las mediatrices de los lados de $A'B'C'$.

Organiza y completa el razonamiento anterior para concluir que AH_A, BH_B, CH_C se cortan en un punto.

Sea P el punto de corte de AH_A y BH_B. Entonces:

1) Como AH_A es la mediatriz del lado $B'C'$, P está a igual distancia de B' que de C'.

2) Como BH_B es la mediatriz del lado $A'C'$, entonces P está a igual distancia de A' que de C'.

Por tanto, uniendo 1) y 2), tenemos que P está a igual distancia de A' que de B'; es decir, P también pertenece a la mediatriz del lado $A'B'$, esto es, a CH_C.

Luego hemos probado que las tres se cortan en el mismo punto.

56 La propiedad anterior puede demostrarse, también, mediante vectores. Llamamos H al punto en que se cortan AH_A y BH_B.

a) Justifica que $\begin{cases} \vec{HA} \cdot (\vec{HC} - \vec{HB}) = 0 \\ \vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0 \end{cases}$

b) De las igualdades anteriores se llega a: $\vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) = 0$ y de aquí se concluye que $\vec{HC} \perp AB$ y, por tanto, que las tres alturas se cortan en H. (Justifica las afirmaciones anteriores).

a) $\vec{HC} - \vec{HB} = \vec{BC}$; y, como AH_A es la altura correspondiente al lado BC, entonces:

$$\vec{BC} \perp \vec{AH_A} \;\rightarrow\; \vec{BC} \perp \vec{HA} \;\rightarrow\; \vec{HA} \cdot \vec{BC} = 0 \;\rightarrow\; \vec{HA} \cdot (\vec{HC} - \vec{HB}) = 0$$

Análogamente, como $\vec{HC} - \vec{HA} = \vec{AC}$, tenemos que: $\vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0$

b) $$\vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) = \vec{HC} \cdot \vec{HB} - \vec{HC} \cdot \vec{HA} = \vec{HB} \cdot \vec{HC} - \vec{HA} \cdot \vec{HC} \overset{(1)}{=}$$

$$= \vec{HB} \cdot \vec{HC} - \vec{HA} \cdot \vec{HB} = \vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) \overset{(2)}{=} 0$$

(1) $\vec{HA} \cdot \vec{HC} - \vec{HA} \cdot \vec{HB} = 0 \;\rightarrow\; \vec{HA} \cdot \vec{HC} = \vec{HA} \cdot \vec{HB}$

(2) $\vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0$

Por tanto, si $\vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) = 0$, como $\vec{HB} - \vec{HA} = \vec{AB}$, entonces $\vec{HC} \perp AB$; luego H también pertenece a la altura correspondiente al vértice C. Así, las tres alturas se cortan en el mismo punto, H.