Para practicar

Recta tangente

1 **Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos que se indican:**

a) $y = ln\,(tg\,2x)$ en $x = \dfrac{\pi}{8}$

b) $y = \sqrt{sen\,5x}$ en $x = \dfrac{\pi}{6}$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 15 = 0$ en $x = 2$

d) $y = (x^2 + 1)^{sen\,x}$ en $x = 0$

a) • Ordenada en el punto: $x = \dfrac{\pi}{8} \to y = 0$

• Pendiente de la recta: $y' = \dfrac{2(1 + tg^2\,2x)}{tg\,2x} \to y'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 4$

• Recta tangente: $y = 4\left(x - \dfrac{\pi}{8}\right) = 4x - \dfrac{\pi}{2}$

b) • Ordenada en el punto: $x = \dfrac{\pi}{6} \to y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

• Pendiente de la recta: $y' = \dfrac{5\,cos\,5x}{2\sqrt{sen\,5x}} \to y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{5(-\sqrt{2}/2)}{2\sqrt{2}/2} = \dfrac{-5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-5\sqrt{6}}{4}$

• Recta tangente: $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{5\sqrt{6}}{4}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

c) • Ordenadas en los puntos:

$$4 + y^2 - 4 - 8y + 15 = 0 \to y^2 - 8y + 15 = 0$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{4} = \frac{8 \pm 2}{4} \begin{cases} y = 5 \to \text{Punto } (2, 5) \\ y = 3 \to \text{Punto } (2, 3) \end{cases}$$

• Pendiente de las rectas:

$$2x + 2yy' - 2 - 8y' = 0$$

$$y'(2y - 8) = 2 - 2x \to y' = \frac{2 - 2x}{2y - 8} = \frac{1 - x}{y - 4}$$

$$y'(2, 5) = \frac{1 - 2}{5 - 4} = -1$$

$$y'(2, 3) = \frac{1 - 2}{3 - 4} = 1$$

• Recta tangente en (2, 5): $y = 5 - 1 \cdot (x - 2) \to y = -x + 7$

• Recta tangente en (2, 3): $y = 3 + 1 \cdot (x - 2) \to y = x + 1$

d) • Ordenada en el punto: $x = 0 \to y = (0 + 1)^{sen\,0} = 1^0 = 1 \to P(0, 1)$

• Pendiente de la recta tangente:

$$y = (x^2 + 1)^{sen\,x} \to ln\,y = sen\,x \cdot ln\,(x^2 + 1) \to$$

$$\to \frac{y'}{y} = cos\,x \cdot ln\,(x^2 + 1) + sen\,x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} \to$$

$$\to y' = \left[cos\,x \cdot ln\,(x^2 + 1) + \frac{2x \cdot sen\,x}{x^2 + 1}\right](x^2 + 1)^{sen\,x}$$

$$m = [cos\,0 \cdot ln\,1 + 0] \cdot 1^0 = (1 \cdot 0 + 0) \cdot 1 = 0$$

• Recta tangente: $y = 1 + 0(x - 0) \to y = 1$

2 Halla las tangentes a la curva $y = \dfrac{2x}{x-1}$ paralelas a la recta $2x + y = 0$.

La pendiente de la recta $2x + y = 0$ es $m = -2$.

Buscamos los puntos en los que la derivada sea igual a -2:

$$y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{-2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$y' = -2 \;\rightarrow\; \frac{2x}{x^2 - 2x + 1} = -2 \;\rightarrow\; -2 = -2(x^2 - 2x + 1)$$

$$x^2 - 2x + 1 \;\rightarrow\; x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto}\,(0, 0) \\ x = 2 \;\rightarrow\; \text{Punto}\,(2, 4) \end{cases}$$

Recta tangente en (0, 0): $y = -2x$

Recta tangente en (2, 4): $y = 4 - 2(x-2) \;\rightarrow\; y - 2x + 8$

3 Obtén la ecuación de la recta tangente paralela al eje de abscisas en las siguientes curvas:

a) $y = x\, ln\, x$ **b) $y = x^2 e^x$** **c) $y = sen\, 2x$**

Una recta paralela al eje de abscisas tiene pendiente cero.

a) $y' = ln\, x + x \cdot \dfrac{1}{x} = ln\, x + 1$

$y' = 0 \;\rightarrow\; ln\, x + 1 = 0 \;\rightarrow\; ln\, x = -1 \;\rightarrow\; x = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \;\rightarrow\; y = \dfrac{-1}{e}$

La recta tangente en el punto $\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{-1}{e}\right)$ es: $y = \dfrac{-1}{e}$

b) $y' = 2x\, e^x + x^2 e^x = (2x + x^2)e^x$

Como $e^x \neq 0$ para todo x:

$$y' = 0 \;\rightarrow\; 2x + x^2 = 0 \;\rightarrow\; x(2 + x) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto}\,(0, 0) \\ x = -2 \;\rightarrow\; \text{Punto}\,(-2, 4/e^2) \end{cases}$$

- En el punto (0, 0), la recta tangente es: $y = 0$
- En el punto $\left(-2, \dfrac{4}{e^2}\right)$, la recta tangente es: $y = \dfrac{4}{e^2}$

c) $y' = 2\, cos\, 2x$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; 2\, cos\, 2x = 0 \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \;\rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k \;\rightarrow\; y = 1 \\ 2x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k \;\rightarrow\; x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi k \;\rightarrow\; y = -1 \end{cases}$$

- En los puntos $\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi k, 1\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$, la recta tangente es: $y = 1$
- En los puntos $\left(\dfrac{3\pi}{4} + \pi k, -1\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$, la recta tangente es: $y = -1$

4 Halla el punto de la gráfica de $y = 2\sqrt{x}$ en el que la tangente forma un ángulo de 60° con el eje X. Escribe la ecuación de esa tangente.

- Si la recta tangente forma un ángulo de 60° con el eje X, su pendiente es $tg\, 60° = \sqrt{3}$.
- Buscamos un punto en el que la derivada valga $\sqrt{3}$:

$$y' = \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y' = \sqrt{3} \;\rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{3} \;\rightarrow\; 1 = 3x \;\rightarrow\; x = \frac{1}{3} \;\rightarrow\; y = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

El punto es $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

• La recta tangente en ese punto será:

$$y' = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) \rightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow y = \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

5 **a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ en $x = 3$.**

b) ¿Existe alguna otra recta tangente a la gráfica de f que sea paralela a la que has hallado? En caso afirmativo, hállala.

a) Hallamos la pendiente de la recta tangente usando la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

$$x = 3,\ f(3) = 8,\ f'(3) = 11 \rightarrow y = 8 + 11(x - 3)$$

b) Para saber si existe otro punto en el que la recta tangente sea paralela resolvemos:

$$f'(x) = 11 \rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 11 \rightarrow x = 3,\ x = -1$$

Hay otro punto:

$x = -1,\ f(-1) = -4 \rightarrow y = -4 + 11(x + 1)$ es la recta tangente en este punto.

6 **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en su punto de inflexión.**

Calculamos primero el punto de inflexión resolviendo $f''(x) = 0$:

$$f'(x) = 12x^2 - 4x$$

$$f''(x) = 24x - 4$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 24x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{6}$$

Evaluando la derivada segunda a ambos lados de $x = \frac{1}{6}$ observamos que la función pasa de convexa a cóncava. Luego es un punto de inflexión.

$$x = \frac{1}{6},\ f\left(\frac{1}{6}\right) = 4\left(\frac{1}{6}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 10 = -\frac{271}{27},\ f'\left(\frac{1}{6}\right) = 12\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

La ecuación es $y = -\frac{271}{27} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}\right)$

7 **Halla los puntos de la curva:**

$$y = 3x^2 - 5x + 12$$

en los que la recta tangente a ella pase por el origen de coordenadas.

Debemos hallar las ecuaciones de las tangentes desde un punto exterior a la gráfica de la función.

Los puntos de tangencia son de la forma $(a, 3a^2 - 5a + 12)$.

La pendiente de la recta tangente que pasa por el origen es $\frac{3a^2 - 5a + 12 - 0}{a - 0} = \frac{3a^2 - 5a + 12}{a}$.

Usando la derivada, la pendiente anterior también es $6a - 5$.

$$\frac{3a^2 - 5a + 12}{a} = 6a - 5 \rightarrow 3a^2 - 5a + 12 = 6a^2 - 5a \rightarrow a -2,\ a = 2$$

Obtenemos dos puntos de tangencia y dos rectas tangentes:

$$x = -2,\ f(-2) = 34,\ f'(-2) = -17 \rightarrow y = -17x$$

$$x = 2,\ f(2) = 14,\ f'(2) = 7 \rightarrow y = 7x$$

8 **Halla los puntos de la curva:**

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 4x - 4$$

en los que la recta tangente a esta pase por el punto (0, –8). Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos.

Debemos hallar las ecuaciones de las tangentes desde un punto exterior a la gráfica de la función.

Los puntos de tangencia son de la forma $\left(a, \frac{a^2}{4} + 4a - 4\right)$.

La pendiente de la recta tangente que pasa por $(0, -8)$ es $\dfrac{\frac{a^2}{4} + 4a - 4 - (-8)}{a - 0} = \dfrac{\frac{a^2}{4} + 4a + 4}{a}$.

Usando la derivada, la pendiente anterior también es $\frac{a}{2} + 4$.

$$\frac{\frac{a^2}{4} + 4a + 4}{a} = \frac{a}{2} + 4 \;\rightarrow\; \frac{a^2}{4} + 4a + 4 = \frac{a^2}{4} + 4a \;\rightarrow\; a = -4,\; a = 4$$

Obtenemos dos rectas tangentes:

$$f'(-4) = 2 \;\rightarrow\; y = -8 + 2x$$

$$f'(4) = 6 \;\rightarrow\; y = -8 + 6x$$

9 **Halla, en cada caso, las ecuaciones de las rectas tangentes paralelas al eje** ***X*****:**

a) $y = \dfrac{x^3}{3(x-1)}$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$ **c)** $y = \dfrac{x^2 + 2x}{e^x}$

a) El eje horizontal tiene pendiente 0.

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{3(x-1)^2}$$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; x^2(2x-3) = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = \frac{3}{2}$$

$$x = 0,\; f(0) = 0 \;\rightarrow\; y = 0$$

$$x = \frac{3}{2},\; f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{9}{4} \;\rightarrow\; y = \frac{9}{4}$$

b) $y' = \dfrac{2x \ln x + x^2 \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \dfrac{x(2 \ln x + 1)}{\ln^2 x}$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; x(2 \ln x + 1) = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \text{ (no vale)},\; x = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$x = e^{-\frac{1}{2}},\; f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{e} \;\rightarrow\; y = -\frac{2}{e}$$

c) $y' = \dfrac{(2x+2)e^x - (x^2+2x)e^x}{e^{2x}} = \dfrac{2 - x^2}{e^{2x}}$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; 2 - x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = \sqrt{2},\; x = -\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2},\; f(\sqrt{2}) = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}} \;\rightarrow\; y = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$$

$$x = -\sqrt{2},\; f(-\sqrt{2}) = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{e^{-\sqrt{2}}} \;\rightarrow\; y = e^{\sqrt{2}}(2 - 2\sqrt{2})$$

Máximos y mínimos. Puntos de inflexión

10 **Halla los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

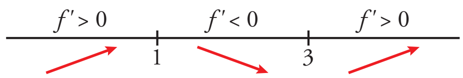
a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ **b)** $y = \dfrac{x^3(3x-8)}{12}$ **c)** $y = x^4 - 2x^3$

d) $y = x^4 + 2x^2$ **e)** $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ **f)** $y = e^x(x-1)$

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$f'(x) = 0 \to 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \to x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \to y = 0 \\ x = 1 \to y = 4 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



Hay un mínimo en (3, 0) y un máximo en (1, 4).

Puntos de inflexión:

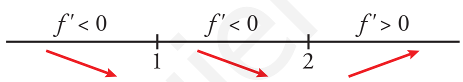
$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \to x = 2 \to y = 2$$

Como $f''(x) < 0$ para $x < 2$ y $f''(x) > 0$ para $x > 2$, el punto (2, 2) es un punto de inflexión.

b) $y = \dfrac{3x^4 - 8x^3}{12}$

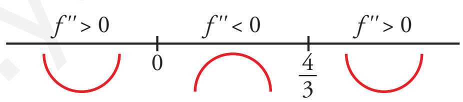
$$f'(x) = \frac{12x^3 - 24x^2}{12} = x^3 - 2x^2$$

$$f'(x) = 0 \to x^2(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \to y = 0 \\ x = 2 \to y = -4/3 \end{cases}$$



Hay un mínimo en $\left(2, \dfrac{-4}{3}\right)$.

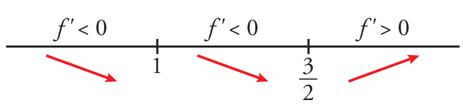
$$f''(x) = 3x^2 - 4x = 0 \to x(3x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \to y = 0 \\ x = 4/3 \to y = -(64/81) \end{cases}$$



Hay un punto de inflexión en (0, 0) y otro en $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{-64}{81}\right)$.

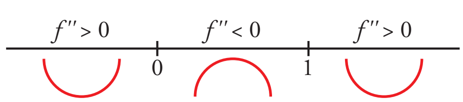
c) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$$f'(x) = 0 \to x^2(4x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \to y = 0 \\ x = 3/2 \to y = -27/16 \end{cases}$$



Hay un mínimo en $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{-27}{16}\right)$.

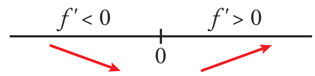
$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1) = 0 \begin{cases} x = 0 \to y = 0 \\ x = 1 \to y = -1 \end{cases}$$



Hay un punto de inflexión en (0, 0) y otro en (1, –1).

d) $f'(x) = 4x^3 + 4x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4x(x^2 + 1) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$



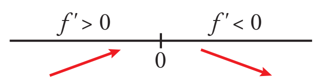
Hay un mínimo en (0, 0).

$f''(x) = 12x^2 + 4 \neq 0$ para todo x.

No hay puntos de inflexión.

e) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

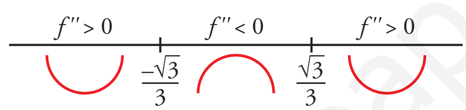
$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1$



Hay un máximo en (0, 1).

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x \cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2(x^2+1)+8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

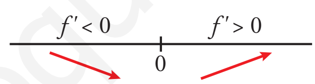
$$f''(x) = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow y = \frac{3}{4}$$



Hay un punto de inflexión en $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$ y otro en $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$.

f) $f'(x) = e^x(x-1) + e^x = e^x(x - 1 + 1) = xe^x$

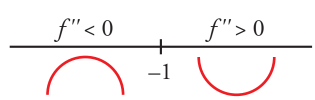
$f'(x) = 0 \rightarrow xe^x = 0 \rightarrow x = 0$ (pues $e^x \neq 0$ para todo x) $\rightarrow y = 1$



Hay un mínimo en (0, –1).

$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow y = \dfrac{-2}{e}$



Hay un punto de inflexión en $\left(-1, \dfrac{-2}{e}\right)$.

11 **Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{8-3x}{x(x-2)}$ **b)** $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

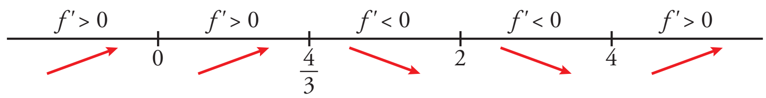
d) $y = \dfrac{2x^2-3x}{2-x}$ **e)** $y = \dfrac{x^2-1}{x}$ **f)** $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)}$

a) $y = \dfrac{8-3x}{x(x-2)} = \dfrac{8-3x}{x^2-2x}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0, 2\}$

$$f'(x) = \frac{-3(x^2-2x)-(8-3x)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{-3x^2+6x-16x+16+6x^2-6x}{(x^2-2x)^2} = \frac{-3x^2+16x+16}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 16x + 16 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{16 \pm \sqrt{256-192}}{6} = \frac{16 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{16 \pm 8}{6} \begin{cases} x = 4 \\ x = 4/3 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$.

Es decreciente en $\left(\frac{4}{3}, -2\right) \cup (2, 4)$.

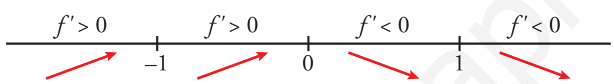
Tiene un máximo en $\left(\frac{4}{3}, -\frac{9}{2}\right)$, y un mínimo en $\left(4, -\frac{1}{2}\right)$.

b) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1)-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$$

Signo de la derivada:



La función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

Es decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

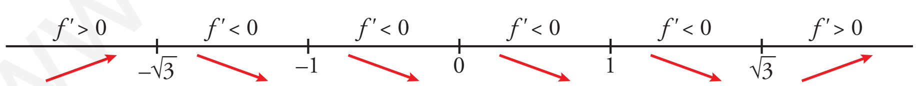
Tiene un máximo en $(0, -1)$.

c) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x^2-3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x\;\sqrt{3} \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

Es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.

Tiene un máximo en $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Tiene un mínimo en $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

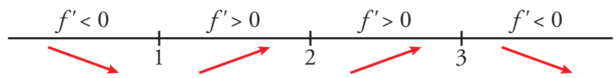
Tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

d) $y = \frac{2x^2-3x}{2-x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{(4x-3)\cdot(2-x)-(2x^2-3x)\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \frac{8x-4x^2-6+3x+2x^2-3x}{(2-x)^2} = \frac{-2x^2+8x-6}{(2-x)^2} = \frac{-2(x^2-4x+3)}{(2-x)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(1, 2) \cup (2, 3)$.

es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(1, -1)$.

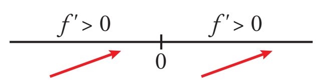
tiene un máximo en $(3, -9)$.

e) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = \dfrac{2xx - (x^2-1)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \dfrac{x^2+1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2-1}{x} = 0$. No tiene solución.

Signo de la derivada:



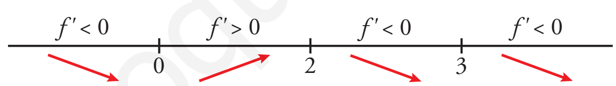
La función es creciente en todo su dominio.

f) $y = \dfrac{8}{x^2(x-3)} = \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0, 3\}$

$f'(x) = \dfrac{-8\,(3x^2 - 6x)}{x^4\,(x - 3x)^2} = \dfrac{-8x\,(3x-6)}{x^4\,(x-3x)^2} = \dfrac{-8\,(3x-6)}{x^3\,(x-3x)^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x - 6 = 0 \;\rightarrow\; x = 2$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(0, 2)$.

es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

tiene un máximo en $(2, -2)$.

12 **Estudia la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 3x + 4$ **b)** $y = x^4 - 6x^2$ **c)** $y = (x-2)^4$

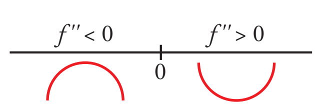
d) $y = x\,e^x$ **e)** $y = \dfrac{2-x}{x+1}$ **f)** $y = ln\,(x+1)$

a) $y = x^3 - 3x + 4$. *Dominio* $= \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3;\; f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de $f''(x)$:



La función es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$.

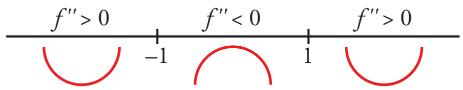
Tiene un punto de inflexión en $(0, 4)$.

b) $y = x^4 - 6x^2$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 12x$; $f''(x) = 12x^2 - 12$

$f''(x) = 0 \rightarrow 12(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Signo de $f''(x)$:



La función es cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y convexa en $(-1, 1)$.

Tiene un punto de inflexión en $(-1, -5)$ y otro en $(1, -5)$.

c) $y = (x - 2)^4$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4(x - 2)^3$; $f''(x) = 12(x - 2)^2$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = 2$

$f''(x) > 0$ para $x \neq 2$

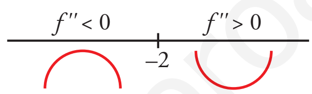
Por tanto, la función es cóncava. No tiene puntos de inflexión.

d) $y = x\,e^x$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x + x\,e^x = (1 + x)e^x$; $f''(x) = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$

$f''(x) = 0 \rightarrow x = -2$ ($e^x \neq 0$ pata todo x)

Signo de $f''(x)$:



La función es convexa en $(-\infty, -2)$ y cóncava en $(-2, +\infty)$.

Tiene un punto de inflexión en $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$.

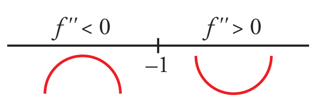
e) $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{-1\,(x + 1) - (2 - x)}{(x + 1)^2} = \frac{-x - 1 - 2 + x}{(x + 1)^2} = \frac{-3}{(x + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x + 1)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ para todo x.

Signo de $f''(x)$:



La función es convexa en $(-\infty, -1)$ y cóncava en $(-1, +\infty)$.

No tiene puntos de inflexión.

f) $y = ln\,(x + 1)$. *Dominio* = $(-1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x + 1}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x + 1)^2}$$

$f''(x) < 0$ para $x \in (-1, +\infty)$

Por tanto, la función es convexa en $(-1, +\infty)$.

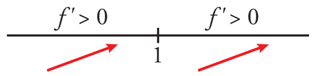
13 **Estudia si las siguientes funciones tienen máximos, mínimos o puntos de inflexión en el punto de abscisa $x = 1$:**

a) $y = 1 + (x - 1)^3$ **b)** $y = 2 + (x - 1)^4$ **c)** $y = 3 - (x - 1)^6$ **d)** $y = -3 + 2(x - 1)^5$

a) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 3(x - 1)^2 \rightarrow 3(x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = 1$

Estudiamos el signo de la derivada:



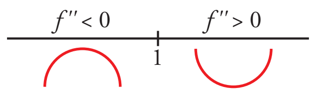
La función crece a la izquierda y a la derecha de $x = 1$.

No hay ni un máximo ni un mínimo.

• Puntos de inflexión: buscamos los puntos en los que $f''(x) = 0$.

$f''(x) = 6(x - 1) \rightarrow 6(x - 1) = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = 1$

Estudiamos el signo de $f''(x)$:



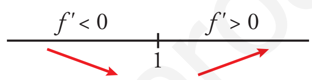
Es convexa a la izquierda de $x = 1$ y cóncava a su derecha.

Hay un punto de inflexión en (1, 1).

b) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 4(x - 1)^3 \rightarrow 4(x - 1)^3 = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = 2$

Estudiamos el signo de la derivada:



La función decrece a la izquierda de $x = 1$ y crece a su derecha.

Hay un mínimo en (1, 2).

• Podemos comprobar que no hay puntos de inflexión con el signo de $f''(x)$:

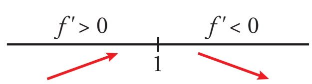
$f''(x) = 12(x - 1)^2 \rightarrow f''(x) \geq 0$ para cualquier x.

La función es cóncava en todo su dominio.

c) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = -6(x - 1)^5 \rightarrow -6(x - 1)^5 = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = 3$

Estudiamos el signo de la derivada:



La función crece a la izquierda de $x = 1$ y decrece a su derecha.

Hay un máximo en (1, 3).

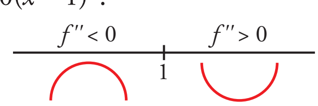
• Como $f''(x) = -30(x - 1)^4 \leq 0$, la función es convexa en todo su dominio.

d) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 10(x - 1)^4 \rightarrow 10(x - 1)^4 = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = -3$

Como $f'(x) = 10(x - 1)^4 \geq 0$, la función es creciente en todo su dominio. No hay máximos ni mínimos.

Estudiamos el signo de $f''(x) = 40(x - 1)^3$:



La función es convexa a la izquierda de $x = 1$ y cóncava a su derecha.

Hay un punto de inflexión en (1, –3).

14 **Determina los máximos y mínimos de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$ **b)** $f(x) = x \ln x$ **c)** $f(x) = sen\, x - cos\, x$ **d)** $f(x) = e^{-x^2}$

a) $f'(x) = 1 - \dfrac{8}{(x+1)^3}$

$f'(x) = 0 \rightarrow 1 - \dfrac{8}{(x+1)^3} = 0 \rightarrow (x-1)^3 = 8 \rightarrow x = 3$

$f''(x) = 1 - \dfrac{24}{(x-1)^4}$

$x = 3,\ y = 4,\ f''(3) > 0 \rightarrow$ El punto (3, 4) es un mínimo relativo de la función.

b) $f'(x) = \ln x + 1$

$f'(x) = 0 \rightarrow \ln x + 1 = 0 \rightarrow x = e^{-1}$

$f''(x) = \dfrac{1}{x}$

$x = e^{-1},\ y = -e^{-1},\ f''(e^{-1}) > 0 \rightarrow$ El punto $(e^{-1}, -e^{-1})$ es un mínimo relativo de la función.

c) $f'(x) = cos\, x + sen\, x$

$f'(x) = 0 \rightarrow cos\, x + sen\, x = 0 \rightarrow sen\, x = -cos\, x \rightarrow tg\, x = -1$ (ya que $cos\, x$ no puede ser 0)

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$f''(x) = -sen\, x + cos\, x$

$x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ y = sen\,\dfrac{3\pi}{4} - cos\,\dfrac{3\pi}{4} = \sqrt{2},\ f''\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) < 0 \rightarrow$ Los puntos $\left(\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, \sqrt{2}\right)$ son máximos relativos de la función.

$x = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ y = sen\,\dfrac{7\pi}{4} - cos\,\dfrac{7\pi}{4} = -\sqrt{2},\ f''\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) > 0 \rightarrow$ Los puntos $\left(\dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi, -\sqrt{2}\right)$ son mínimos relativos de la función.

d) $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow -2xe^{-x^2} = 0 \rightarrow x = 0$

$f''(x) = -2xe^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$

$x = 0,\ y = 0,\ f''(0) < 0 \rightarrow$ El punto (0, 0) es un máximo relativo.

15 **Dadas las funciones:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 + 7x - 4 & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 + 3x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

a) Comprueba que son derivables en $\mathbb{R}$.

b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos.

Ambas funciones son continuas y derivables salvo quizás en los puntos donde se separan los trozos porque están definidas por intervalos mediante funciones polinómicas.

a) Estudiamos el punto $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 + 2x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} (4x - 2) = 2 \end{cases} \rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 2 = f(1) \rightarrow \text{Es continua también en } x = 1.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow f'(1^-) = 4 = f'(1^+) \rightarrow \text{Es derivable en } x = 1.$$

Estudiamos el punto $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + 7x - 4) = 14 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (2x^2 + 3x) = 14 \end{cases} \to \lim_{x \to 2} g(x) = 14 = g(2) \to \text{Es continua también en } x = 2.$$

$$g'(x) = \begin{cases} 2x + 7 & \text{si } x < 2 \\ 4x + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases} \to f'(2^-) = 11 = f'(2^+) \to \text{Es derivable en } x = 2.$$

b) En el caso de $f(x)$:

$f'(x) = 0 \to 2x + 2 = 0 \to x = -1$ (pertenece al intervalo de definición)

$x = -1$, $y = -2$, $f''(-1) > 0 \to$ El punto $(-1, -2)$ es un mínimo relativo.

En el caso de $g(x)$:

$$g'(x) = 0 \to \begin{cases} 2x + 7 = 0 \to x = -\dfrac{7}{2} \text{ (pertenece al intervalo de definición)} \\ 4x + 3 = 0 \to x = -\dfrac{3}{4} \text{ (no vale porque no está en el intervalo de definición)} \end{cases}$$

$x = -\dfrac{7}{2}$, $y = -\dfrac{65}{4}$, $g''\left(-\dfrac{7}{2}\right) > 0 \to$ El punto $\left(-\dfrac{7}{2}, -\dfrac{65}{4}\right)$ es un mínimo relativo.

16 **Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x|x|$. ¿Tiene máximos o mínimos?**

Determina los intervalos de concavidad y convexidad. ¿Tiene algún punto de inflexión?

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases} \to \text{Es una función continua en } \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}, \ f'(0^-) = 0 = f'(0^+) \to \text{También es derivable en } x = 0.$$

La primera derivada solo se anula cuando $x = 0$.

La función no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \to \text{Es convexa en el intervalo } (-\infty, 0) \text{ y cóncava en } (0, +\infty).$$

El punto $(0, 0)$ es un punto de inflexión porque cambia de convexa a cóncava.

Página 294

Coeficientes de una función

17 **Dada la función $f(x) = 1 + \dfrac{a}{x} + \dfrac{6}{x^2}$, calcula a sabiendo que $f(x)$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 3$. ¿Se trata de un máximo o un mínimo?**

Como tiene un extremo relativo en $x = 3$ debe cumplirse que $f'(3) = 0$.

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} - \frac{12}{x^3}$$

$$f'(3) = 0 \to -\frac{a}{9} - \frac{12}{27} = 0 \to a = -4$$

Por tanto, $f(x) = 1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{6}{x^2}$.

$$f'(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{12}{x^3}; \ f''(x) = -\frac{8}{x^3} + \frac{36}{x^4}$$

$x = 3$, $f(3) = \dfrac{1}{3}$, $f''(3) = -\dfrac{8}{27} + \dfrac{36}{81} = \dfrac{4}{27} > 0 \to$ El punto $\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$ es un mínimo relativo.

18 **De la función $f(x) = ax^3 + bx$ sabemos que pasa por (1, 1) y en ese punto tiene tangente paralela a la recta $3x + y = 0$. Halla a y b.**

$f(x) = ax^3 + bx$; $f'(x) = 3ax^2 + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \to a + b = 1 \\ f'(1) = -3 \to 3a + b = -3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 3 \end{array}\right\} f(x) = -2x^3 + 3x$$

19 **Halla una función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y un punto de inflexión en $P(1, 2)$.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$f(1) = 2 \to 1 + a + b + c = 2$

$f''(1) = 0 \to 6 + 2a = 0$

$f'(2) = 0 \to 3 + 2a + b = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 1 + a + b + c = 2 \\ 6 + 2a = 0 \\ 3 + 2a + b = 0 \end{array}\right\} \to a = -3,\ b = 3,\ c = 1$$

20 **Calcula los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$, sabiendo que:**

a) La ecuación de la recta tangente a f en $x = 0$ es $y = x$.

b) Tiene un extremo relativo en el punto (–1, 0).

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$

Del apartado a) se deduce que pasa por el punto (0, 0) y que $f'(0) = 1$.

El apartado b) implica que $f(-1) = 0$ y que $f'(-1) = 0$.

$f'(0) = 1 \to c = 1$

$f(-1) = 0 \to 1 - a + b - 1 = 0 \to -a + b = 0$

$f'(-1) = 0 \to -4 + 3a - 2b + 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} -a + b = 0 \\ -4 + 3a - 2b + 1 = 0 \end{array}\right\} \to a = 3,\ b = 3$$

21 **Halla a, b, c y d para que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo relativo en el punto (0, 4) y un mínimo relativo en el punto (2, 0).**

Las condiciones del problema implican que:

$f(0) = 4$, $f'(0) = 0$, $f(2) = 0$, $f'(2) = 0$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$d = 4$

$c = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 8a + 4b + 4 = 0 \\ 12a + 4b = 0 \end{array}\right\} \to a = 1,\ b = -3$$

22 **Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$ y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$. Halla a, b, c y d.**

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\left.\begin{array}{lcr} f(1)=0 & \to & a+b+c+d=0 \\ f'(0)=2 & \to & c=2 \\ f'(1)=0 & \to & 3a+2b+c=0 \\ f'(2)=0 & \to & 12a+4b+c=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a+b+d=-2 \\ c=2 \\ 3a+2b=-2 \\ 6a+2b=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{-3}{2} \\ c=2 \\ d=\dfrac{-5}{6} \end{array}$$

Así: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{6}d$; $f'(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1) \cdot (x-2)$

23 **Dada la función $y = ax^4 + 3bx^3 - 3x^2 - ax$, calcula los valores de a y b sabiendo que tiene dos puntos de inflexión, uno en $x = 1$ y otro en $x = 1/2$.**

$f'(x) = 4ax^3 + 9bx^2 - 6x - a$

$f''(x) = 12ax^2 + 18bx - 6$

$$\left.\begin{array}{lcr} f''(1)=0 & \to & 12a+18b-6=0 \\ f''(1/2)=0 & \to & 3a+9b-6=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2a+3b-1=0 \\ a+3b-2=0 \end{array}\right\}$$

Restando las igualdades: $a + 1 = 0 \to a = -1$

Sustituyendo en la 2.ª ecuación: $3b - 3 = 0 \to b = 1$

24 **La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = -1$ y tiene un punto de inflexión en el punto $(2, 1)$. Calcula a, b y c.**

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{lcl} f(-1)=0 & \to & -1+a-b+c=0 \\ f(2)=1 & \to & 8+4a+2b+c=1 \\ f''(2)=0 & \to & 12+2a=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a-b+c=1 \\ 4a+2b+c=-7 \\ a=-6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=-6 \\ b=\dfrac{10}{3} \\ c=\dfrac{31}{3} \end{array}$$

25 **La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y que f no tiene extremo relativo en $x = 1$. Calcula a, b y c.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{lcl} f(1)=1 & \to & 1+a+b+c=1 \\ f'(1)=0 & \to & 3+2a+b=0 \\ f''(1)=0 & \to & 6+2a=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a=-3 \\ b=3 \\ c=0 \end{array}\right\} \to f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

26 **Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$. Halla a y b para que la curva $y = f(x)$ tenga en $x = 1$ un punto de inflexión con tangente horizontal.**

Si la curva tiene un punto de inflexión en $x = 1$, debe ser $f''(1) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \to f''(x) = 6x + 2a \to f''(1) = 6 \cdot 1 + 2a \to 6 + 2a = 0$

Si en $x = 1$ la tangente es horizontal, su pendiente será 0; y, por tanto, $f'(1) = 0$.

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 3 + 2a + b = 0$

Resolvemos: $\begin{cases} 6 + 2a = 0 \;\to\; a = -3 \\ 3 + 2a + b = 0 \;\to\; b = -3 - 2(-3) = 3 \end{cases}$

La curva será $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$.

27 **Halla el valor de c de modo que la función $y = \dfrac{e^x}{x^2 + c}$ tenga un único punto crítico.**

¿Se trata de un máximo, de un mínimo o de un punto de inflexión?

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + c) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + c)^2} = \frac{e^x(x^2 + c - 2x)}{(x^2 + c)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; x^2 - 2x + c = 0 \;\to\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4c}}{2}$$

Para que solo haya un extremo relativo, ha de ser: $4 - 4c = 0 \;\to\; c = 1$

En este caso sería:

$$y = \frac{e^x}{x^2 + 1};\; f'(x) = \frac{e^x(x + 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; x = 1$$

$$f'(x) = 0 \text{ si } x \neq 1 \;\to\; f(x) \text{ es creciente si } x \neq 1.$$

Hay un punto de inflexión en $x = 1$.

28 **a) Calcula los valores de los parámetros a y b para que sea derivable la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Halla sus extremos relativos en el caso $a = -2$, $b = 1$.

a) La función está definida por intervalos mediante funciones continuas y derivables. Solo nos queda estudiar el punto $x = 0$. Veamos la continuidad de la función:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1 - x}{e^x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + ax + b) = b \end{cases} \;\to\; b = 1$$

Para el valor obtenido de b la función es continua porque $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 2}{e^x} & \text{si } x < 0 \;\to\; f'(0^-) = -2 \\ 2x + a & \text{si } x > 0 \;\to\; f'(0^+) = a \end{cases} \;\to\; a = -2 \text{ para que sea derivable en } x = 0.$$

Si $a = -2$ y $b = 1$ la función es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 2}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; \begin{cases} \dfrac{x - 2}{e^x} = 0 \;\to\; x = 2 \text{ (no vale)} \\ 2x - 2 = 0 \;\to\; x = 1 \end{cases}$$

Estudiando el signo de la primera derivada en las proximidades de $x = 1$, obtenemos que el punto $(1, 0)$ es un mínimo relativo.

Para resolver

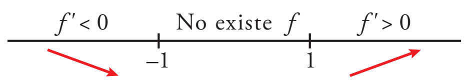
29 **Halla el dominio de definición y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:**

$$f(x) = ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

La función está definida cuando $\frac{x^2-1}{x^2+1} > 0$. Como el denominador es siempre positivo, debe ser $x^2 - 1 > 0$. Por tanto el dominio de definición es $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$ (este punto no es válido porque no está en el dominio de definición).



La función es decreciente en $(-\infty, -1)$ y creciente en $(1, +\infty)$.

30 **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 - y^2 + 2x - 6 = 0$ en los puntos de ordenada $y = 3$.**

Calculamos primero las abscisas de los puntos.

$$x^2 - 9 + 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3,\ x = -5$$

Derivamos en forma implícita:

$$2x - 2yy' + 2 = 0 \rightarrow x - yy' + 1 = 0 \rightarrow y' = \frac{x+1}{y}$$

$$x = -5,\ y = 3,\ y' = \frac{-5+1}{3} = -\frac{4}{3} \rightarrow \text{Recta tangente: } y = 3 - \frac{4}{3}(x+5)$$

$$x = 3,\ y = 3,\ y' = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3} \rightarrow \text{Recta tangente: } y = 3 + \frac{4}{3}(x-3)$$

31 **Determina los puntos de la circunferencia $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ en los que la recta tangente a ella es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.**

Para que la recta tangente sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante, la pendiente de la recta tangente debe ser 1.

Derivamos en forma implícita:

$$2(x-3) + 2(y+2)y' = 0 \rightarrow y' = \frac{3-x}{y+2}$$

$$y' = 1 \rightarrow \frac{3-x}{y+2} = 1 \rightarrow 3 - x = y + 2 \rightarrow y = -x + 1$$

Hallamos los puntos de la circunferencia que cumplen esta condición:

$$\left.\begin{array}{l}(x-3)^2+(y+2)^2=16\\ y=-x+1\end{array}\right\} \rightarrow \text{Soluciones: } \left.\begin{array}{l}x=3-2\sqrt{2},\ y=-2+2\sqrt{2}\\ x=3+2\sqrt{2},\ y=-2-2\sqrt{2}\end{array}\right\}$$

32 **Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = arc\ tg\ \frac{x-1}{x+1}$ que es paralela a la recta $x - 2y + 3 = 0$.**

$x - 2y + 3 = 0 \rightarrow y = \frac{x+3}{2}$ tiene pendiente $\frac{1}{2}$.

Igualamos la derivada a esta pendiente para que la recta tangente sea paralela a la recta dada.

$$y' = \frac{1}{x^2+1}$$

$y' = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2} \rightarrow x = -1$ (no es un punto válido), $x = 1$

$$x = 1,\ y = 0,\ y' = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}(x-1)$$

33 **Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = x^{x/2}$ en el punto de absicsa $x = e$.**

$$ln\, y = \frac{x}{2}\, ln\, x \;\rightarrow\; \frac{y'}{y} = \frac{1 + ln\, x}{2} \;\rightarrow\; y' = x^{\frac{x}{2}}\, \frac{1 + ln\, x}{2}$$

$$x = e,\; y = e^{\frac{x}{2}},\; y' = e^{\frac{x}{2}} \;\rightarrow\; y = e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}}(x - e)$$

34 **Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y los mínimos de la función dada por:**

$$y = |x^2 + 2x - 3|$$

Definimos la función por intervalos. Para ello, calculamos los puntos donde $f(x) = 0$:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \;\begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \le x \le 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hallamos la derivada de f:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -3 \\ -2x - 2 & \text{si } -3 \le x < 1 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = -3$ no es derivable, pues $f'(-3^-) = -4 \ne f'(-3^+) = 4$.

En $x = 1$ no es derivable, pues $f'(1^-) = -4 \ne f'(1^+) = 4$.

- Veamos dónde se anula la derivada:

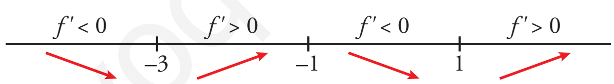
  $2x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = -1$

  Pero $f'(x) = 2x + 2$ para $x < -3$ y $x > 1$.

  $-2x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = -1$ y $f'(x) = -2x - 2$ para $-3 < x < 1$

  Por tanto, $f'(x)$ se anula en $x = -1 \;\rightarrow\; f(-1) = 4$.

- Signo de la derivada:



- La función: es creciente en $(-3, -1) \cup (1, +\infty)$.

  es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$.

  tiene un máximo en $(-1, 4)$.

  tiene un mínimo en $(-3, 0)$ y otro en $(1, 0)$. Son los puntos donde f no es derivable.

35 **Estudia la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $y = |x^2 - 4|$.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

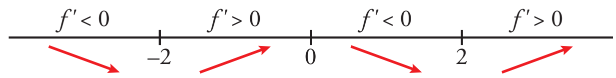
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En $x = -2$ no es derivable, pues $f'(-2^-) = -4 \ne f'(-2^+) = 4$.

En $x = 2$ no es derivable, pues $f'(2^-) = -4 \ne f'(2^+) = 4$.

- La derivada se anula en $x = 0$.

- Signo de la derivada:



- La función tiene un máximo relativo en (0, 4).

  No tiene máximo absoluto $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty\right)$.

- Tiene un mínimo relativo en (–2, 0) y otro en (2, 0). En estos puntos, el mínimo también es absoluto, puesto que $f(x) \geq 0$ para todo x.

36 **La curva $y = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ corta al eje de abscisas en $x = 1$ y tiene un punto de inflexión en (3, 2). Calcula los puntos de la curva que tengan recta tangente paralela al eje X.**

$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma;\ f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta;\ f''(x) = 6x + 2\alpha$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 0 \ \to \ 1 + \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ f(3) = 2 \ \to \ 27 + 9\alpha + 3\beta + \gamma = 2 \\ f''(3) = 0 \ \to \ 18 + 2\alpha = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \alpha = -9 \\ \beta = 24 \\ \gamma = -16 \end{array}\right\}$$

Así: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16;\ f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

- Puntos con tangente horizontal:

$$f'(x) = 0 \ \to \ x = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 288}}{6} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{18 \pm 6}{6} \begin{array}{l} x = 4 \\ x = 2 \end{array}$$

- Los puntos son (4, 0) y (2, 4).

37 **Halla el ángulo que forman las rectas tangentes a las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el punto de abscisa 2:**

$$f(x) = 2x - x^2 \qquad g(x) = x^2 - x - 2$$

- La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$ es:

  $f'(x) = 2 - 2x \ \to \ f'(2) = -2$

- La pendiente de la recta tangente a $g(x)$ en $x = 2$ es:

  $g'(x) = 2x - 1 \ \to \ g'(2) = 3$

- El ángulo que forman las dos rectas será:

$$tg\,\alpha = \left|\frac{-2-3}{1-6}\right| = 1 \ \to \ \alpha = 45°$$

38 **Dada la función $f(x) = |x - 3|(x + 1)$, halla los puntos donde las tangentes son paralelas a la recta $y = 6x - 2$.**

$$f(x) = \begin{cases} -(x-3)(x+1) & \text{si } x < 3 \\ (x-3)(x+1) & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La función no es derivable en $x = 3$ porque las derivadas laterales son distintas.

$$f'(x) = 6 \ \to \ \begin{cases} -2x + 2 = 6 \ \to \ x = -2 \\ 2x - 2 = 6 \ \to \ x = 4 \end{cases}$$

$x = -2,\ y = -5$

$x = 4,\ y = 5$

Los puntos buscados son (–2, –5) y (4, 5).

39 **Dada la función $f(x) = 4 - x^2$ se pide:**

a) El punto de esa curva en el que la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos (–1, 3) y (2, 0).

b) Las rectas que pasan por el punto (–2, 1) y son tangentes a la curva.

a) La cuerda que une los puntos dados tiene pendiente $m = \dfrac{0-3}{2-(-1)} = -1$.

$f'(x) = -2x$

$f'(x) = -1 \rightarrow -2x = -1 \rightarrow x = \dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{15}{4}$

La solución es el punto $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{15}{4}\right)$.

b) El punto (–2, 1) no pertenece a la curva. Debemos calcular las tangentes a la curva desde un punto exterior.

Un punto genérico de la curva es de la forma $(a, 4-a^2)$. La pendiente de la recta que pasa por este punto y el (–2, 1) es $m = \dfrac{4-a^2-1}{a-(-2)} = \dfrac{3-a^2}{a+2}$.

Así $\dfrac{3-a^2}{a+2} = -2a \rightarrow 3 - a^2 = -2a(a+2) \rightarrow a = -3,\ a = -1$

Tenemos dos rectas tangentes:

$$\left.\begin{array}{l} x=-3 \rightarrow f'(-3)=6 \rightarrow y=1+6(x+2) \\ x=-1 \rightarrow f'(-1)=2 \rightarrow y=1+2(x+2) \end{array}\right\}$$

40 **Halla el valor que debe tener a para que la función $f(x) = x^2 \ln \dfrac{x}{a}$, $a > 0$, tenga un punto singular en $x = e$.**

El dominio de definición es $(0, +\infty)$ por ser a positivo.

$$f'(x) = x + 2x \ln \frac{x}{a}$$

Para que tenga un punto singular en $x = e$ debe ser $f'(e) = 0$

$e + 2e \cdot \ln \dfrac{e}{a} = 0 \rightarrow e\left(1 + 2\ln \dfrac{e}{a}\right) = 0 \rightarrow 1 + 2(\ln e - \ln a) = 0 \rightarrow 1 + 2 - 2\ln a = 0 \rightarrow \ln a = \dfrac{3}{2}$

$a = e^{3/2}$

Página 295

41 **Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \le 0 \\ x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$.**

Determina a, b y c para que sea continua, tenga un máximo en $x = -1$ y la tangente en $x = -2$ sea paralela a la recta $y = 2x$.

La función está definida por intervalos mediante funciones continuas. Exigimos la continuidad en $x = 0$ y así será continua en $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} (ax^2 + bx + c) = c$

$\lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \dfrac{-\infty}{+\infty}$ (indeterminado).

Usando la regla de L'Hôpital $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x) = 0$.

Luego $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0$.

Por tanto, para que sea continua $c = 0$.

Si $x < 0$, $f'(x) = 2ax + b$

Por tener un máximo en $x = -1$, $f'(-1) = 0 \rightarrow -2a + b = 0 \rightarrow b = 2a$

Para que la tangente en $x = -2$ sea paralela a la recta $y = 2x$, debe ser $f'(2) = 2 \rightarrow -4a + b = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} b = 2a \\ -4a + b = 2 \end{array}\right\} \rightarrow a = -1,\ b = -2$$

42 **a) Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + px & \text{si } x \le 1 \\ x^2 + mx + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

calcula los valores de m, n y p para que f sea derivable en $\mathbb{R}$ y tenga un extremo relativo en $x = -\dfrac{1}{2}$.

b) ¿Es un máximo o un mínimo?

c) Comprueba si existen otros puntos singulares y representa la función.

a) La función está definida por intervalos mediante funciones polinómicas, luego es continua y derivable salvo, quizás, en el punto.

Estudiamos el punto $x = 1$.

Continuidad:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} (-x^2 + px) = -1 + p \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + mx + n) = 1 + m + n \end{array}\right\} \rightarrow -1 + p = 1 + m + n \rightarrow m + n - p = -2$$

Si se cumple la condición anterior la función será continua en $x = 1$ porque $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + p & \text{si } x < 1 \\ 2x + m & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'(1^-) = -2 + p \\ f'(1^+) = 2 + m \end{cases} \rightarrow -2 + p = 2 + m \rightarrow m - p = -4$$

Si se cumple la condición anterior la función será derivable en $x = 1$ al coincidir las derivadas laterales.

Para que tenga un extremo relativo en $x = -\dfrac{1}{2}$, $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow 1 + p = 0 \rightarrow p = -1$.

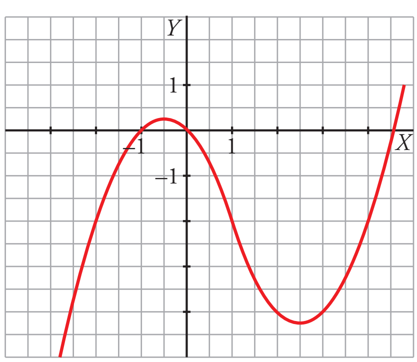
$$\left.\begin{array}{l} p = -1 \\ m - p = -4 \\ m + n - p = -2 \end{array}\right\} \rightarrow m = -5,\ n = 2,\ p = -1$$

b) $f''\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2 < 0 \rightarrow$ El extremo relativo es un máximo.

c) Si existe otro extremo relativo, debe estar en el segundo intervalo.

$$f'(x) = 0\ (x > 1) \rightarrow 2x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$f''\left(\frac{5}{2}\right) = 2 > 0 \rightarrow \text{En } x = \frac{5}{2} \text{ hay un mínimo relativo.}$$



43 **Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ a\sqrt{b-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.**

a) Determina el valor de a y b sabiendo que $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

b) ¿Tiene puntos singulares?

a) Exigimos la continuidad y derivabilidad en $x = 0$.

Veamos la continuidad:

$$\lim_{x \to 0^-} (x + 2e^{-x}) = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} a\sqrt{b-x} = a\sqrt{b}$$

Cuando $a\sqrt{b} = 2$, la función es continua ya que $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

Veamos la derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - 2e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-a}{2\sqrt{b-x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \to \begin{cases} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = \dfrac{-a}{2\sqrt{b}} \end{cases} \to -1 = \frac{-a}{2\sqrt{b}}$$

Si se cumple la condición anterior será derivable en $x = 0$ ya que coinciden sus derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} a\sqrt{b} = 2 \\ \dfrac{a}{2\sqrt{b}} = 1 \end{array}\right\} \to a = 2,\ b = 1$$

La función queda así: $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ 2\sqrt{1-x} & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Su derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 1 - 2e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-1}{\sqrt{1-x}} & \text{si } 0 \le x < 1 \end{cases}$

b) Los puntos singulares solo pueden estar en el primer trozo ya que la derivada no se anula cuando $x \ge 0$.

$f'(x) = 0 \to 1 - 2e^{-x} = 0 \to x = \ln 2 > 0$ (este punto no es válido porque no pertenece al intervalo de definición)

Luego no tiene puntos singulares.

44 **Halla los puntos de la parábola $y = x^2 - 1$ que se encuentran a distancia mínima del punto $A\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$.**

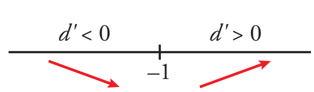
La distancia entre el punto $A\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ y un punto $P(x, x^2 - 1)$ de la parábola es:

$$|\overrightarrow{AP}| = d(x) = \sqrt{(x+2)^2 + \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4x^4 + 16x + 17}$$

Buscamos los que minimizan la distancia:

$$d'(x) = \frac{4x^3 + 4}{\sqrt{4x^4 + 16x + 17}}$$

$$d'(x) = 0 \to 4x^3 + 4 = 0 \to x = -1$$



$x = -1,\ y = 0 \to$ En el punto $(-1, 0)$ se alcanza la mínima distancia.

45 **El nivel medio diario de CO_2 de una ciudad depende del número de habitantes, p, y viene dado por la función:**

$$C(p) = \sqrt{\frac{p^2}{2} + 17}$$

con p en miles y C en partes por millón (ppm).

Si la evolución de la población de esa ciudad en t años es $p(t) = 3{,}1 + 0{,}1t^2$, en miles de habitantes, ¿con qué rapidez estará variando la concentración de CO_2 en ese lugar dentro de 3 años?

La expresión del nivel medio diario de CO_2 en función del tiempo en años es $C[p(t)] = (C \circ p)(t)$.

La variación de CO_2 viene dada por la derivada de la función anterior.

$$(C \circ p)'(t) = C'[p(t)] \cdot p'(t) = \frac{3,1 + 0,1t^2}{2\sqrt{\frac{(3,1+0,1t^2)^2}{2} + 17}} \cdot 0{,}2t$$

Ya que:

$$C'(p) = \frac{p}{2\sqrt{\frac{p^2}{2} + 17}} \quad \text{y} \quad p'(t) = 0{,}2t$$

Si $t = 3 \rightarrow (C \circ p)'(3) = \dfrac{3,1 + 0,9}{2\sqrt{\frac{(3,1+0,9)^2}{2} + 17}} \cdot 0{,}6 = 0{,}24$

Nos da un crecimiento de 0,24 partes por millón a los 3 años.

46 **La velocidad de una partícula en m/s, viene dada por la función $v(t) = (t^2 + 2t)e^{-t}$ con $t \geq 0$.**

a) ¿En qué instante del intervalo [0, 3] se alcanza la velocidad máxima?

b) Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} v(t)$ e interpreta el resultado.

a) $v'(t) = (2 - t^2)e^{-t}$

$v'(t) = 0 \rightarrow (2 - t^2)e^{-t} = 0 \rightarrow t = \sqrt{2} \in [0, 3]$

Estudiando los signos de $v'(t)$ a ambos lados de $\sqrt{2}$ podemos comprobar que en $t = \sqrt{2}$ hay un máximo relativo. La velocidad no puede ser mayor en los extremos 0 y 3 debido a la forma en que la función crece y decrece.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (t^2 + 2t)\, e^{-t} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{t^2 + 2t}{e^t} = 0$

Este resultado combinado con el apartado anterior nos indica que a partir del instante $\sqrt{2}$ la velocidad de la partícula disminuye tendiendo a pararse cuando el tiempo aumenta.

47 **En un experimento, la cantidad de agua en función del tiempo viene dada por la expresión**

$$C(t) = \frac{2}{3} + 10t + \frac{10}{t} + \frac{240}{t^3}$$

con $t \in [1, 10]$, t en horas y $C(t)$ en litros.

Halla cuál es la cantidad mínima de agua y en qué instante de tiempo se obtiene.

El problema consiste en hallar el mínimo absoluto de una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado.

$$C'(t) = 10 - \frac{10}{t^2} - \frac{720}{t^4}$$

$C'(t) = 0 \rightarrow 10 - \dfrac{10}{t^2} - \dfrac{720}{t^4} = 0 \rightarrow t^4 - t^2 - 72 = 0 \rightarrow t = 3,\ t = -3$ (el punto no es válido)

Evaluamos en el punto singular y en los extremos del intervalo.

$C(1) = \frac{2}{3} + 10 + 10 + 240 = \frac{782}{3} \approx 260{,}67$

$C(3) = \frac{2}{3} + 30 + \frac{10}{3} + \frac{240}{3} = \frac{386}{3} \approx 42{,}89$

$C(10) = \frac{2}{3} + 100 + \frac{10}{10} + \frac{240}{1\,000} = \frac{7\,643}{75} \approx 101{,}91$

La cantidad mínima se alcanza a las 3 horas y es aproximadamente de 42,89 litros.

48 **Calcula los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los de concavidad y convexidad de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = x^2 + |x-2|$ **b)** $f(x) = 3e^{-2|x|}$

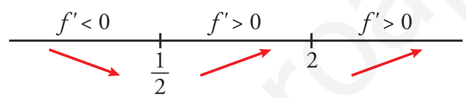
a) $|x-2| = \begin{cases} -(x-2) & \text{si } x < 2 \\ x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 & \text{si } x < 2 \\ x^2 + x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

La función no es derivable en $x = 2$ ya que las derivadas laterales en dicho punto no coinciden.

$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \\ 2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ (este punto no vale)} \end{cases}$

La tabla de los signos de la primera derivada es:



La función es decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

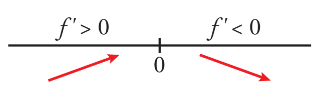
$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases} \rightarrow f(x)$ es cóncava en $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \begin{cases} 3e^{2x} & \text{si } x < 0 \\ 3e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 6e^{2x} & \text{si } x < 0 \\ -6e^{-2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

La función no es derivable en $x = 0$ porque las derivadas laterales en dicho punto no coinciden.

La primera derivada nunca se anula. Por tanto, su tabla de los signos es:



Es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

$f'(x) = \begin{cases} 12e^{2x} & \text{si } x < 0 \\ 12e^{-2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Como la segunda derivada es positiva, es cóncava en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$.

49 **Calcula el máximo y el mínimo absolutos en el intervalo [–2, 3] de la función:**

$$f(x) = ln(x^2 + 1) + (x - 3)$$

La función dada es continua en el intervalo [–2, 3] luego alcanza su máximo y su mínimo absoluto. Estos pueden ser los extremos del intervalo o los máximos y mínimos relativos.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} + 1$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \frac{2x}{x^2+1} + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = -1$$

Evaluamos:

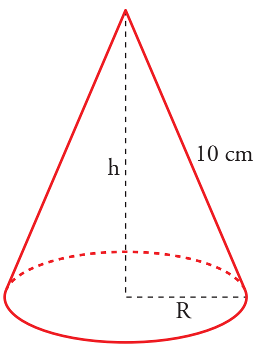
$$x = -2,\; f(-2) = \ln 5 - 5 \approx -3{,}39$$

$$x = -1,\; f(-1) = \ln 2 - 4 \approx -3{,}31$$

$$x = 3,\; f(3) = \ln 10$$

Su mínimo absoluto es el punto $(-2, \ln 5 - 5)$ y su máximo absoluto es el punto $(3, \ln 10)$.

50 Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?



$$h^2 + R^2 = 100 \;\rightarrow\; R^2 = 100 - h^2$$

$$Volumen = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(100 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$$

Tenemos que maximizar la función volumen:

$$f(h) = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$$

$$f'(h) = \frac{1}{3}\pi(100 - 3h^2)$$

$$f'(h) = 0 \;\rightarrow\; 100 - 3h^2 = 0 \;\rightarrow\; h = \pm\sqrt{\frac{100}{3}}$$

(consideramos la raíz positiva, pues $h \geq 0$).

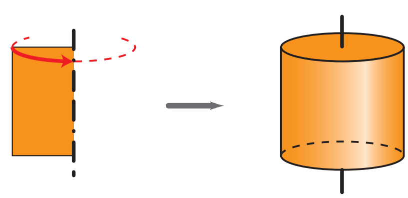
$\Big(f'(h) > 0$ a la izquierda de $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$ y $f'(h) < 0$ a la derecha de $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$.

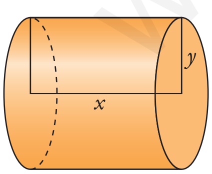
Luego en $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$ no hay máximo$\Big)$.

Por tanto, el radio de la base será:

$$R^2 = 100 - h^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \;\rightarrow\; R = \sqrt{\frac{200}{3}}$$

51 Halla la base y la altura de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm q ue, al girar alrededor de un lado vertical, genere un cilindro de volumen máximo.





$$Perímetro\ cartulina = 2x + 2y = 60 \;\rightarrow\; x + y = 30 \;\rightarrow\; x = 30 - y$$

$$Volumen = \pi y^2 x = \pi y^2(30 - y) = \pi(30y^2 - y^3)$$

Tenemos que maximizar la función:

$$V(y) = \pi(30y^2 - y^3)$$

$$V'(y) = \pi(60y - 3y^2)$$

$$V'(y) = 60y - 3y^2 = 0 \;\rightarrow\; 3y(20 - y) = 0 \;<\; \begin{array}{l} y = 0 \text{ (no vale)} \\ y = 20 \;\rightarrow\; x = 10 \end{array}$$

(En $y = 20$ hay un máximo, pues $V'(y) > 0$ a la izquierda de este valor y $V'(y) < 0$ a su derecha).

Los lados de la cartulina medirán 20 cm y 10 cm.

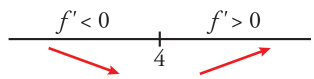
52 **Sean x e y dos números positivos cuyo producto vale 16. ¿Puede $x + y$ ser menor que 7? Razona la respuesta.**

Supongamos que $xy = 16$ con $x, y > 0 \rightarrow y = \dfrac{16}{x}$ con $x > 0$.

Consideremos que la función $f(x) = x + \dfrac{16}{x}$, que es continua y derivable en $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = 1 - \frac{16}{x^2}$$

$$1 - \frac{16}{x^2} = 0 \rightarrow x = 4$$



$x = 4$, $f(4) = 8 \rightarrow (4, 8)$ es el mínimo absoluto de la función en $(0, +\infty)$.

Así la suma mínima es 8 y, por tanto, no puede ser menor que 7.

53 **El radio de un círculo crece uniformemente con una velocidad de 2 cm/s. Halla la velocidad de crecimiento de su superficie cuando el radio sea 5 cm.**

Llamamos $R(t) = 2t$ a la función que describe el radio en función del tiempo.

El radio es igual a 5 cm cuando $t = 2,5$ s.

La función que describe a la superficie del círculo es $S(t) = \pi R^2(t) = 4\pi t^2$.

La velocidad de crecimiento se obtiene mediante la derivada $S'(t) = 8\pi t$.

$t = 2,5$; $S'(2,5) = 8\pi \cdot 2,5 = 62,83 \text{ cm}^2/\text{s}$

54 **a) Siendo $h(x)$ la suma de las coordenadas del punto $P(x, f(x))$ de la gráfica de $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$. Calcula los extremos relativos de $h(x)$.**

b) ¿Tiene $h(x)$ algún extremo absoluto?

a) $h(x) = x + f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$

$h'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x$

$h'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 + 3x^2 + 2x = 0 \rightarrow x = 0$

$h''(x) = 12x^2 + 6x + 2$

$h''(0) = 2 > 0 \rightarrow$ En $x = 0$ hay un mínimo relativo.

$x = 0$, $h(0) = 1 \rightarrow$ El mínimo relativo es $(0, 1)$.

b) El mínimo relativo es necesariamente un mínimo absoluto porque la función siempre decrece a su izquierda y siempre crece a su derecha.

55 **El punto $P(x, y)$ recorre la elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.**

Deduce las posiciones del punto P para las que su distancia al punto (0, 0) es máxima y también aquellas para las que su distancia es mínima.

La distancia entre un punto $P(x, y)$ de la elipse y el origen de coordenadas es $d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Está definida para valores de x en el intervalo $[-5, 5]$ y de y en el intervalo $[-3, 3]$. (Si x o y tomaran valores fuera de esos intervalos, no se cumpliría la ecuación de la elipse).

Usando la derivación implícita:

$$d' = \frac{2x + 2yy'}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Por otro lado, derivando implícitamente la ecuación de la elipse:

$$\frac{2x}{25} + \frac{2yy'}{9} = 0 \rightarrow \frac{yy'}{9} = -\frac{x}{25} \rightarrow y' = -\frac{9x}{25y}$$

Sustituyendo en la expresión de la derivada:

$$d' = \frac{xyy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x + y\left(-\dfrac{9x}{25y}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{16}{25}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$d' = 0 \rightarrow x = 0$$

Por tanto, las distancias máximas o mínimas se pueden alcanzar en los extremos $x = -5$, $x = 5$ o en el punto singular $x = 0$.

Calculamos las ordenadas de los puntos:

$$x = -5 \rightarrow 1 + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow y = 0$$

$$x = 5 \rightarrow 1 + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow y = 0$$

$$x = 0 \rightarrow 0 + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow y = -3,\ y = 3$$

Evaluamos en los cuatro puntos obtenidos:

$$x = -5,\ y = 0 \rightarrow d = 5$$

$$x = 5,\ y = 0 \rightarrow d = 5$$

$$x = 0,\ y = -3 \rightarrow d = 3$$

$$x = 0,\ y = 3 \rightarrow d = 3$$

La distancia máxima se alcanza en los puntos (–5, 0) y (5, 0).

La distancia mínima se alcanza en los puntos (–3, 0) y (3, 0).

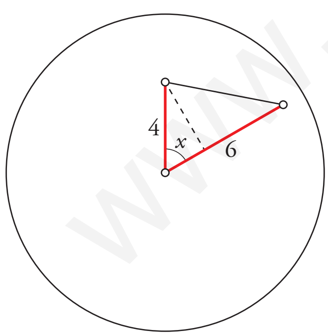
NOTA. Gráficamente es muy sencillo comprobar estos resultados porque la elipse dada está centrada en el origen, su semieje mayor mide 5 unidades y su semieje menor, 3. La distancia máxima se alcanza en los extremos del eje mayor y la mínima en los extremos del eje menor.

56 Las manecillas de un reloj miden 4 cm y 6 cm; uniendo sus extremos se forma un triángulo.

a) Demuestra que el área de ese triángulo viene dada por $A(x) = 12 sen\, x$, donde x es el ángulo que forman las manecillas.

b) Halla x para que el área del triángulo sea máxima y calcula dicha área.

a)



Si llamamos x al ángulo que forman las manecillas, la altura del triángulo sobre la manecilla mayor es $a = 4\ sen\ x$.

El área del triángulo es $A(x) = \dfrac{6 \cdot 4\ sen\ x}{2} = 12\ sen\ x$, con $x \in (0, \pi)$ para que se pueda construir el mismo.

b) $A'(x) = 12\ cosx$

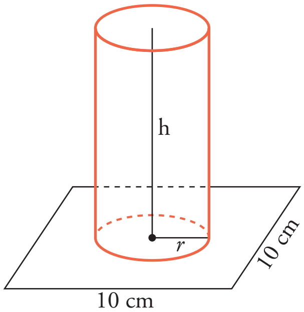
$$A'(x) = 0 \rightarrow 12\ cos\ x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$A''(x) = -12\ sen\ x$$

$$A''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -12 < 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2},\ A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12 \text{ es el máximo relativo.}$$

Las manecillas deben ser perpendiculares para que el área sea máxima y ésta es de 12 cm^2.

57 **En un cuadrado de lado 10 cm queremos apoyar la base de un cilindro cuya área lateral es $50\ cm^2$. ¿Cuál debe ser el radio del cilindro para que su volumen sea máximo?**



Área lateral cilindro $= 2\pi r h = 50\ cm^2 \ \rightarrow\ h = \dfrac{50}{2\pi r}$

El volumen del cilindro es:

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{50}{2\pi r} = 25r \ \rightarrow\ V(r) = 25r$$

Al estar apoyada la base sobre el cuadrado, tenemos que el dominio de $V(r)$ es el intervalo $(0, 5]$.

Tenemos que maximizar $V(r) = 25r$, con r $(0, 5]$.

Como $V(r)$ es una función creciente, su máximo se alcanza en $r = 5$.

58 **Dada f: $[1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$, determina cuáles de las rectas tangentes a la gráfica de f tienen la máxima pendiente.**

La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es $f'(a)$. Tenemos que hallar el máximo de:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x},\ \ x \in [1, e]$$

Calculamos la derivada de $f'(x)$; es decir, $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{2-x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \ \rightarrow\ 2 - x = 0 \ \rightarrow\ x = 2 \in [1, e]$$

(En $x = 2$ hay un máximo relativo de $f'(x)$, pues $f''(x) > 0$ a la izquierda de ese valor y $f''(x) < 0$ a su derecha).

Hallamos $f'(x)$ en $x = 2$ y en los extremos del intervalo $[1, e]$:

$$f'(2) = \frac{1}{4} = 0{,}25;\ \ f'(1) = 0;\ \ f'(e) = \frac{e-1}{e^2} \approx 0{,}23$$

Por tanto, la recta tangente con pendiente máxima es la recta tengente en $x = 2$. La hallamos:

$$f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2;\ \ f'(2) = \frac{1}{4}$$

La recta es: $y = \dfrac{1}{2} + \ln 2 + \dfrac{1}{4}(x - 2)$

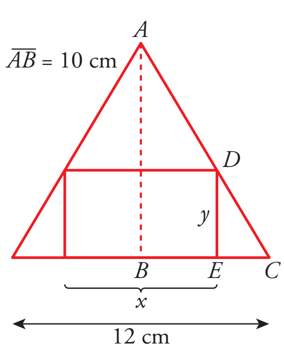
Página 296

59 **En un triángulo isósceles de base 12 cm (el lado desigual) y altura 10 cm, se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus lados esté sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre los lados iguales:**

a) Expresa el área, A, del rectángulo en función de su base, x, y di cuál es el dominio de la función.

b) Halla el valor máximo de esa función.

a)



Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{DEC}$ son semejantes; luego:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$$

Como: $\overline{AB} = 10$ cm $\quad \overline{DE} = y \quad \overline{BC} = 6$ cm $\quad \overline{EC} = \dfrac{12-x}{2}$

Tenemos que:

$$\frac{10}{y} = \frac{6}{\frac{12-x}{2}} \ \rightarrow\ \frac{10}{y} = \frac{2}{12-x}$$

$$10(12-x) = 12y \rightarrow y = \frac{10(12-x)}{12} = \frac{5(12-x)}{6} = \frac{60-5x}{6}$$

Por tanto, el área del rectángulo es:

$$A = x \cdot y = x \cdot \frac{(60-5x)}{6} = \frac{60x-5x^2}{6} \rightarrow A(x) = \frac{60x-5x^2}{6}$$

x puede tomar valores entre 0 y 12. Por tanto, el dominio de $A(x)$ es:

$$Dominio = (0, 12)$$

b) Hallamos el máximo de $A(x)$:

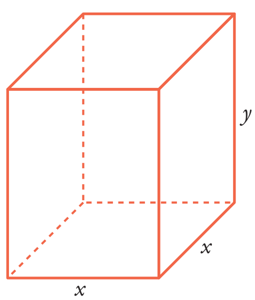
$$A'(x) = \frac{60-10x}{6}$$

$$A'(x) = 0 \rightarrow 60 - 10x = 0 \rightarrow x = 6 \rightarrow y = 5$$

(En $x = 6$ hay un máximo, pues $A'(x) > 0$ para $x < 6$ y $A'(x) < 0$ para $x > 6$).

El máximo de la función $A(x)$ se alcanza en $x = 6$, que corresponde al rectángulo de base 6 cm y altura 5 cm. En este caso, el área es de 30 cm^2 (que es el área máxima).

60 **Queremos hacer un envase con forma de prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral, usamos un determinado material, pero para la base, debemos emplear un material un 50 % más caro. Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.**



$$Volumen = x^2y = 80 \text{ cm}^3 \rightarrow y = \frac{80}{x^2}$$

Para la tapa y el lateral $\rightarrow$ z €/cm^2

Para la base $\rightarrow$ $1{,}5z$ €/cm^2

El precio total será:

$$P = z(x^2 + 4xy) + 1{,}5z(x^2) = z\left(x^2 + 4x \cdot \frac{80}{x^2}\right) + 1{,}5x^2z =$$

$$= z\left(x^2 + \frac{320}{x}\right) + 1{,}5x^2z = z\left(x^2 + \frac{320}{x} + 1{,}5x^2\right) = z\left(2{,}5x^2 + \frac{320}{x}\right)$$

Tenemos que minimizar la función que nos da el precio:

$$P(x) = z\left(2{,}5x^2 + \frac{320}{x}\right)$$

$$P'(x) = z\left(5x - \frac{320}{x^2}\right) = z\left(\frac{5x^3 - 320}{x^2}\right)$$

$$P'(x) = 0 \rightarrow 5x^3 - 320 = 0 \rightarrow x^3 = 64 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = 5$$

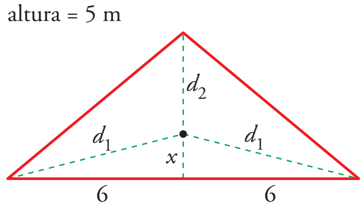
(En $x = 4$ hay un mínimo, pues $P'(x) < 0$ a la izquierda de ese valor y $P'(x) > 0$ a su derecha).

El envase debe tener la base cuadrada de lado 4 cm y 5 cm de altura.

61 **Un triángulo isósceles tiene el lado desigual de 12 m y la altura relativa a ese lado de 5 m.**

Encuentra un punto P sobre la altura tal que la suma de distancias de P a los tres vértices sea mínima.

altura = 5 m



La suma de las distancias a los tres vértices es:

$$S = 2d_1 + d_2$$

Pero: $d_1 = \sqrt{x^2+36}$ y $d_2 = 5 - x$

Por tanto:

$$S(x) = 2\sqrt{x^2+36} + 5 - x$$

Tenemos que minimizar la función $S(x)$:

$$S'(x) = 2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+36}} - 1 = \frac{2x - \sqrt{x^2+36}}{\sqrt{x^2+36}}$$

$$S'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x - \sqrt{x^2+36} = 0 \;\rightarrow\; 2x = \sqrt{x^2+36}$$

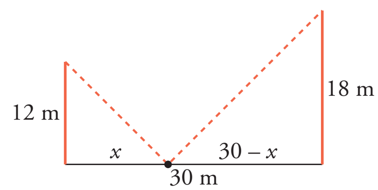
$$4x^2 = x^2 + 36 \;\rightarrow\; 3x^2 = 36 \;\rightarrow\; x^2 = 12 \;\rightarrow\; x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

(consideramos solo la raíz positiva, pues $x \geq 0$).

(En $x = 2\sqrt{3}$ hay un mínimo, pues $S'(x) < 0$ a la izquierda de ese valor y $S'(x) > 0$ a su derecha).

Por tanto, el punto buscado se encuentra a $2\sqrt{3}$ m de la base, situado sobre la altura.

62 Dos postes de 12 m y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos. ¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?



La longitud total del cable es:

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 12^2} + \sqrt{(30-x)^2 + 18^2}; \text{ es decir: } L(x) = \sqrt{x^2+144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1\,224};$$

$$L'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+144}} + \frac{2x-60}{2\sqrt{x^2-60x+1\,224}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+144}} + \frac{x-30}{\sqrt{x^2-60x+1\,224}} =$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2-60x+1\,224} + (x-30)\sqrt{x^2+144}}{\sqrt{(x^2+144)(x^2-60x+1\,224)}}$$

$$L'(x) = 0 \;\rightarrow\; x\sqrt{x^2-60x+1\,224} + (x-30)\sqrt{x^2+144} = 0$$

$$x\sqrt{x^2-60x+1\,224} = -(x-30)\sqrt{x^2+144}$$

$$x^2(x^2 - 60x + 1\,224) = (x-30)(x^2+144)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1\,224x^2 = (x^2 - 60x + 900)(x^2 + 144)$$

$$x^4 - 60x^3 + 1\,224x^2 = x^4 + 144x^2 - 60x^3 - 8\,640x + 900x^2 + 129\,600$$

$$180x^2 + 8\,640x - 129\,600 = 0$$

$$x^2 + 48x - 720 = 0$$

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{2\,304 + 2\,880}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{5\,184}}{2} = \frac{-48 \pm 72}{2} \begin{cases} x = 12 \\ x = -60 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

(En $x = 12$ hay un mínimo, pues $L'(x) < 0$ a la izquierda de ese valor y $L'(x) > 0$ a su derecha).

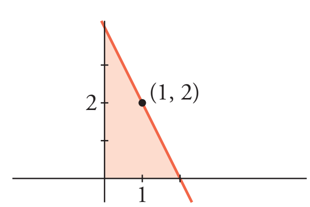
Por tanto, el punto del suelo debe situarse a 12 m del poste de 12 m (y a 18 m del poste de 18 m).

63 De todas las rectas que pasan por el punto (1, 2), encuentra la que determina con los ejes de coordenadas, y en el primer cuadrante, un triángulo de área mínima.

Las rectas que pasan por el punto (1, 2) son de la forma:

$$y = 2 + m(x-1)$$

Hallamos los puntos de corte con los ejes de la recta:



- Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 2 - m \rightarrow$ Punto $(0, 2-m)$
- Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x = 1 - \dfrac{2}{m} \rightarrow$ Punto $\left(1 - \dfrac{2}{m}, 0\right)$

El área del triángulo es:

$$A(m) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{m}\right)(2-m) = \frac{1}{2}\left(2-m-\frac{4}{m}+2\right) = \frac{1}{2}\left(4-m-\frac{4}{m}\right)$$

Hallamos el mínimo de la función:

$$A'(m) = \frac{1}{2}\left(-1+\frac{4}{m^2}\right) = \frac{-m^2+4}{2m^2}$$

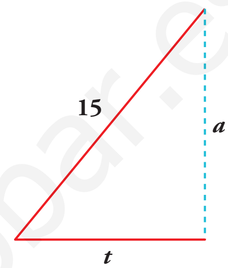
$$A'(m) = 0 \;\to\; -m^2+4=0 \begin{cases} m=2 \text{ (no vale)} \\ m=-2 \end{cases}$$

($m = 2$ no vale, pues no formará un triángulo en el primer cuadrante la recta con los ejes).

(En $m = -2$ hay un mínimo, pues $A'(m) < 0$ a la izquierda de ese valor y $A'(m) > 0$ a su derecha).

Por tanto, la recta es: $y = 2 - 2(x-1)$; es decir: $y = -2x + 4$

64 Una escalera se apoya en la pared. Si el extremo inferior comienza a deslizarse a una velocidad de 1m/s, ¿cuál será la velocidad del extremo superior en el instante en que el extremo inferior diste 5 m de la pared? La longitud de la escalera es de 15 m.



*** *Ten en cuenta que en el instante t, en segundos, el extremo inferior se ha separado de la pared t metros. Halla la altura a(t) a la que se encuentra el extremo superior. Averigua el valor de a'(5).***

$a(t) = \sqrt{15^2 - t^2} = \sqrt{225 - t^2}$ con $t \in [0, 15]$

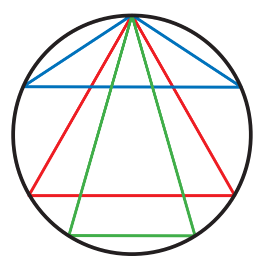
$a(t)$ es derivable en $(0, 15)$.

$$a'(t) = -\frac{t}{\sqrt{225-t^2}}$$

Como el extremo inferior se desliza a 1 m/s, estará a 5 m de la pared cuando $t = 5$.

La velocidad del extremo superior en ese instante es $a'(5) = -\dfrac{5}{\sqrt{225-5^2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ m/s

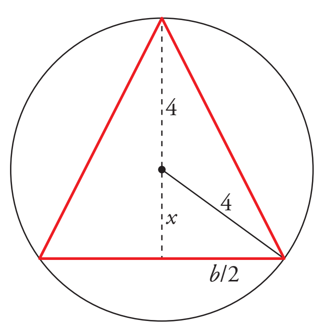
65 Calcula las dimensiones del triángulo isósceles de área máxima, inscrito en una circunferencia de 4 m de radio.



Cada triángulo isósceles cuya base se encuentre por encima del diámetro horizontal se corresponde con otro que tiene la misma base y está situado por debajo del diámetro horizontal. El área de este segundo triángulo es necesariamente mayor que la del primero porque tiene la misma base y mayor altura. Por eso podemos limitarnos a los triángulos cuya base queda por debajo del diámetro horizontal.

Si llamamos x a la distancia del centro de la circunferencia a la base del triángulo y b a la medida de la base tenemos:

$$\frac{b}{2} = \sqrt{16-x^2} \;\to\; b = 2\sqrt{16-x^2} \text{ con } x \in [0, 4)$$



El área del triángulo es $A(x) = \dfrac{2\sqrt{16-x^2}\,(x+4)}{2} = \sqrt{16-x^2}\,(x+4)$.

$$A'(x) = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}(x+4) + \sqrt{16-x^2} = -2\frac{x^2+2x-8}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \;\to\; x^2+2x+8=0 \;\to\; x=2,\; x=-4 \text{ (no vale)}$$

El área máxima se podrá dar en $x = 0$, por ser un extremo del intervalo, o en $x = 2$.

$x = 0$, $A(0) = 16 \text{ cm}^2$

$x = 2$, $A(2) = 12\sqrt{3} \approx 20{,}785 \text{ cm}^2$ (área máxima)

La base del triángulo mide $4\sqrt{3}$ cm y la altura, 6 cm.

Cuestiones teóricas

66 **Comprueba que $f(x) = x^3 - 18x$, definida en el intervalo $[0, 3\sqrt{2}]$, verifica las hipótesis del teorema de Rolle y encuentra el valor $c \in (0, 3\sqrt{2})$ para el que $f'(c) = 0$.**

$f(x) = x^3 - 18x$ es derivable en todo $\mathbb{R}$: por tanto, es continua en $[0, 3\sqrt{2}]$ y derivable en $(0, 3\sqrt{2})$.

Además, $f(0) = f(3\sqrt{2}) = 0$. Luego verifica la hipótesis del teorema de Rolle en $[0, 3\sqrt{2}]$.

Existe, pues, un $c \in (0, 3\sqrt{2})$ tal que $f'(c) = 0$.

Lo calculamos: $f'(x) = 3x^2 - 18 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{6}$ $\begin{cases} x = -\sqrt{6} \notin (0, 3\sqrt{2}) \\ x = \sqrt{6} \in (0, 3\sqrt{2}) \end{cases}$

Por tanto, $c = \sqrt{6}$.

67 **La función $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$, ¿cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 4]? En caso afirmativo, di cuál es el x_0 que cumple la tesis.**

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ es continua en [0, 4] y derivable en (0, 4); luego cumple las hipótesis del teorema del valor medio en [0, 4].

Veamos en que punto, o puntos, cumple la tesis:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$$

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{-6 - (-2)}{4} = \frac{-6 + 2}{4} = -1$$

$$f'(x) = -1 \rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = -1 \rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 48}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{10 \pm 2\sqrt{13}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{3}$$

Hay dos puntos: $x_0 = \dfrac{5 - \sqrt{13}}{3}$ y $x_1 = \dfrac{5 + \sqrt{13}}{3}$

68 **Se tiene la función:** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } -2 \le x \le -1 \\ \dfrac{x^2 - 3}{2} & \text{si } -1 < x \le 0 \end{cases}$

Prueba que f satisface las hipótesis del teorema del valor medio en [–2, 0] y calcula el o los puntos en los que se cumple el teorema.

Veamos que $f(x)$ es continua en [–2, 0]:

- Si $x \ne -1 \rightarrow f(x)$ es continua, pues está formada por dos funciones continuas.
- Si $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{1}{x}\right) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{x^2 - 3}{2}\right) = -1 \\ f(1) = -1 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = -1$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en [–2, 0].

Veamos que $f(x)$ es derivable en [–2, 0]:

- Si $x \neq -1$ y $x \in (-2, 0)$, f es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2} & \text{si } -2 < x < -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

- En $x = -1$, tenemos que:

$$f'(-1^-) = f'(-1^+)$$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $(-2, 0)$.

Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2} & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

Como $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en $[-2, 0]$, existe algún punto, $c \in (-2, 0)$, tal que $f'(c) = \dfrac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \dfrac{-3/2 - (-1/2)}{2} = \dfrac{-1}{2}$.

Calculamos c:

- $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ si $-2 < x \leq -1$

$$-\frac{1}{x^2} = \frac{-1}{2} \rightarrow x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \in (-2, -1) \\ x = \sqrt{2} \notin (-2, -1) \end{cases}$$

- $f'(x) = x$ si $-1 \leq x < 0$

$$x = -\frac{1}{2} \in (-1, 0)$$

- Por tanto, hay dos soluciones:

$$c_1 = -\frac{1}{2} \text{ y } c_2 = -\sqrt{2}$$

69 **¿Es posible calcular a, b, c para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

cumpla el teorema de Rolle en el intervalo $[0, c]$?

El teorema de Rolle dice: Si f es una función continua en $[0, c]$ y derivable en $(0, c)$ y $f(0) = f(c)$, existe algún punto $x \in (0, c)$ tal que $f'(x) = 0$.

Calculamos a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable.

- Continuidad:

— Si $x \neq 1 \rightarrow f(x)$ es continua, pues está formada por dos polinomios.

— En $x = 1$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (5x + 1) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (ax^2 + bx + 3) = a + b + 3 \\ f(1) = a + b + 3 \end{array}\right\}$$ Para que sea continua, ha de ser $a + b + 3 = 6$; es decir: $a + b = 3$

- Derivabilidad:

— Si $x \neq 1 \rightarrow f(x)$ es derivable. Además: $f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < 1 \\ 2ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

— En $x = 1$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 5 \\ f'(1^+) = 2a + b \end{array}\right\}$$ Para que sea derivable, ha de ser: $2a + b = 5$

- Con las dos condiciones obtenidas, hallamos a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=3 \\ 2a+b=5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b=3-a \\ 2a+3-a=5 \rightarrow a=2 \rightarrow b=1 \end{array}$$

- Con estos valores de a y b, queda:

$$f(x)=\begin{cases} 5x+1 & \text{si } x<1 \\ 2x^2+x+3 & \text{si } x\ge 1 \end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases} 5 & \text{si } x<1 \\ 4x+1 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

$f'(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{R} \rightarrow f(x)$ es creciente $\rightarrow$ No existe ningún valor de c tal que $f(0)=f(c)$ puesto que:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=1 \\ f(c)=2c^2+c+3 \end{array}\right\} 2c^2+c+3=1 \rightarrow 2c^2+c+2=0 \rightarrow c=\frac{-1\pm\sqrt{1-16}}{4} \text{ no tiene solución.}$$

No existe ningún c tal que $f(x)$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, c]$.

70 **La función $f(x)=|\cos x|$ toma en los extremos del intervalo $[0, \pi]$ el valor 1. ¿Cumplirá el teorema de Rolle?**

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{si } 0\le x\le \pi/2 \\ -\cos x & \text{si } \pi/2\le x\le \pi \end{cases} \text{ es continua en } [0, \pi].$$

Además, $f(0)=f(\pi)=1$.

La derivada de $f(x)$, si $x\ne\frac{\pi}{2}$ es: $f'(x)=\begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si } 0<x<\pi/2 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } \pi/2<x<\pi \end{cases}$

Como $f'\left(\frac{\pi}{2}^-\right)=-1\ne f'\left(\frac{\pi}{2}^+\right)=1$, $f(x)$ no es derivable en $x=\frac{\pi}{2}\in(0, \pi)$.

Por tanto, $f(x)$ no es derivable en el intervalo $(0, \pi)$; y no podemos aplicar el teorema de Rolle.

71 **Sea f una función continua y derivable tal que $f(0)=3$. Calcula cuánto tiene que valer $f(5)$ para asegurar que en $[0, 5]$ existe un c tal que $f'(c)=8$.**

Si $f(x)$ es continua en $[0, 5]$ y derivable en $(0, 5)$, por el teorema del valor medio, podemos asegurar que existe $c\in(0, 5)$ tal que:

$$f'(c)=\frac{f(5)-f(0)}{5-0}$$

En este caso: $f'(c)=\dfrac{f(5)-3}{5-0}=\dfrac{f(5)-3}{5}=8 \rightarrow f(5)=43$

72 **Calcula a y b para que:**

$$f(x)=\begin{cases} ax-3 & \text{si } x<4 \\ -x^2+10x-b & \text{si } x\ge 4 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [2, 6]. ¿Dónde cumple la tesis?

El teorema del valor medio dice: si f es una función continua en $[2, 6]$ y derivable en $(2, 6)$, existe algún punto $c\in(2, 6)$ tal que $f'(c)=\dfrac{f'(6)-f'(2)}{6-2}$.

- Continuidad:

— Si $x\ne 4 \rightarrow f(x)$ es continua, pues está formada por dos polinomios.

— En $x=4$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}(ax-3)=4a-3 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}(-x^2+10x-b)=24-b \\ f(4)=24-b \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser: } 4a-3=24-b; \\ \text{es decir: } 4a+b=27 \end{array}$$

- Derivabilidad:

— Si $x \neq 4 \rightarrow f(x)$ es derivable. Su derivada es: $f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

— En $x = 4$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(4^-) = a \\ f'(4^+) = 2 \end{array}\right\} \text{ Para que sea derivable, ha de ser: } a = 2$$

- Uniendo los dos resultados obtenidos:

$$\left.\begin{array}{l} 4a + b = 27 \\ a = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 19 \end{array}$$

- Por tanto, si $a = 2$ y $b = 19$, se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[2, 6]$. En este caso quedaría:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - 19 & \text{si } x \geq 4 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

- Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{5 - 1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$-2x + 10 = 1 \rightarrow x = \frac{9}{2} \in (2, 6)$$

La tesis se cumple en $c = \dfrac{9}{2}$.

73 **Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Prueba que $f(1) = f(-1) = 0$, pero que $f'(x)$ no es nunca cero en el intervalo $[-1, 1]$. Explica por qué este resultado contradice aparentemente el teorema de Rolle.**

$$f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}} \rightarrow \text{No existe } f'(0)$$

Por tanto, $f(x)$ no es derivable en el intervalo $(-1, 1)$; y no podemos aplicar el teorema de Rolle.

74 **La derivada de una función f es positiva para todos los valores de la variable. ¿Puede haber dos números distintos, a y b, tales que $f(a) = f(b)$? Razónalo.**

No es posible, si la función es derivable (y nos dicen que lo es, pues $f'(x) > 0$ para todo x).

Lo probamos por reducción al absurdo:

Supongamos que existen dos números distintos, a y b, tales que $f(a) = f(b)$.

$f(x)$ es derivable para todo x. Por el teorema de Rolle, habría un punto c, en el que $f'(c) = 0$.

Esto contradice el que $f'(x) > 0$ para todo x.

75 **Calcula a, b y c para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$. ¿En qué punto se cumple la tesis?

- Continuidad:

— Si $x \neq 2 \rightarrow f(x)$ es continua, pues está formada por dos polinomios.

— En $x = 2$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (cx + 1) = 2c + 1 \\ f(2) = 2c + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser } 4 + 2a + b = 2c + 1; \\ \text{es decir: } 2a + b - 2c = -3 \end{array}$$

- Derivabilidad:

  — Si $x \neq 2 \;\rightarrow\; f(x)$ es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 2 \\ c & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

  — En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4 + a \\ f'(2^+) = c \end{array}\right\} \text{ Para que sea derivable, ha de ser: } 4 + a = c$$

- $\left.\begin{array}{l} f(0) = b \\ f(4) = 4c + 1 \end{array}\right\} \; b = 4c + 1$

- Para que se cumplan las hipótesis del teorema de Rolle en [0, 4], ha de cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} 2a + b - 2c = -3 \\ 4 + a = c \\ b = 4c + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -3 \\ b = 5 \\ c = 1 \end{array}$$

  En este caso sería:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

  Y se cumplirían las hipótesis del teorema de Rolle.

- Veamos dónde cumple la tesis:

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{3}{2} \in (0, 4)$$

  Por tanto, la tesis se cumple en $x = \dfrac{3}{2}$.

Página 297

76 **Dada la función:**

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{ln\,(3^x + x) + ln\,(x^2 - 10x + 20)}}$$

demuestra que existe un valor $a \in (1, 2)$ tal que $f'(a) = 0$.

Menciona y justifica los resultados teóricos empleados.

Consideremos la función $g(x) = 3^x + x$.

$g'(x) = 3^x\, ln\, 3 + 1 > 0 \;\rightarrow\; g(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$. En particular lo es en el intervalo [1, 2].

Luego $g(x) > g(1) = 4$ cuando $x \in [1, 2] \;\rightarrow\; ln\,[g(x)] > ln\,[g(1)] = ln\, 4 > 0$ cuando $x \in [1, 2]$ por ser creciente la función logaritmo neperiano.

Consideremos ahora la función $h(x) = x^2 - 10x + 20$.

$h'(x) = 2x - 10 < 0$ cuando $x \in [1, 2] \;\rightarrow\; h(x)$ decreciente en $x \in [1, 2] \;\rightarrow\; h(x) > h(2) = 4 \;\rightarrow$ $\rightarrow\; ln\,[h(x)] > ln\,[h(1)] = ln\, 4 > 0$ por ser creciente la función logaritmo neperiano.

Por tanto, el radicando de $f(x)$ es la suma de dos números positivos y la raíz está bien definida.

$f(x)$ es derivable en el intervalo [1, 2].

$f(x)$ es derivable en (1, 2).

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = \sqrt{ln\,4 + ln\,11} \\ f(2) = \sqrt{ln\,11 + ln\,4} \end{array}\right\} \rightarrow f(1) = f(2)$$

Por el teorema de Rolle existe un valor $a \in (1, 2)$ tal que $f'(a) = 0$.

77 **¿Verdadero o falso? Razona la respuesta.**

a) Una función que no sea una recta puede tener infinitos puntos en los que su recta tangente sea $y = 1$.

b) Si $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$, entonces f no puede tener ni máximo ni mínimo en $x = a$.

c) Si un polinomio de grado 3 tiene un mínimo en $x = 2$, ese mínimo no puede ser mínimo absoluto.

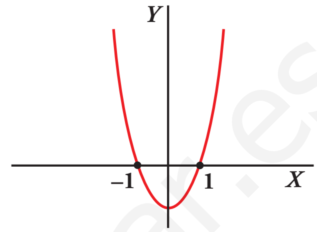
d) Una función continua en [0, 5], que no es derivable en $x = 3$, no puede tener un máximo en $x = 3$.

e) Si $y = f(x)$ es creciente en $x = a$, entonces $y = -f(x)$ es decreciente en $x = a$.

f) Si $f'(a) = 0$, f tiene un máximo o un mínimo en $x = a$.

g) Si $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ y $f'''(a) = -5$, f tiene un punto de inflexión en $x = a$.

h) Si esta es la gráfica de $f'(x)$, entonces f tiene un mínimo en $x = -1$ y un máximo en $x = 1$.



a) Verdadero.

Las funciones $y = sen\,x$ o $y = cos\,x$ tienen infinitos puntos en los que la recta tangente es $y = 1$. Sucede en los máximos relativos de la función.

b) Falso.

Por ejemplo, la función $f(x) = x^4$ tiene un mínimo relativo en (0, 0) y $f'(0) = f''(0) = 0$

c) Verdadero.

La razón es que en un polinomio de tercer grado $p(x)$ ocurre que:

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} p(x) = -\infty$$

o bien,

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$$

Los polinomios de tercer grado no tienen ni máximos ni mínimos absolutos.

d) Falso.

La función $y = 2 - |x - 3|$ no es derivable en $x = 3$ y tiene un máximo en ese punto.

e) Verdadero.

Supongamos que $f(x)$ es creciente en $x = a$.

Entonces existe un entorno E en el que si $x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$.

Pero $f(x_1) < f(x_2) \to -f(x_1) > -f(x_2)$. Luego $-f(x)$ es decreciente en ese mismo entorno E.

f) Falso.

La función $y = x^3$ es creciente en $x = 0$, pero $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$.

g) Verdadero.

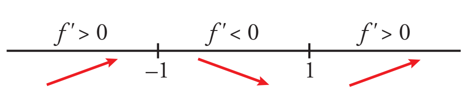
Si $f'''(a) = -5 \to$ Existe un entorno de $x = a$ en el que $f''(x)$ es decreciente.

Como $f''(a) = 0$, en ese entorno, $f''(x) > 0$ cuando $x < a$ y $f''(x) < 0$ cuando $x > a$.

Por tanto, la función pasa de cóncava a convexa y tiene un punto de inflexión en $x = a$.

h) Falso.

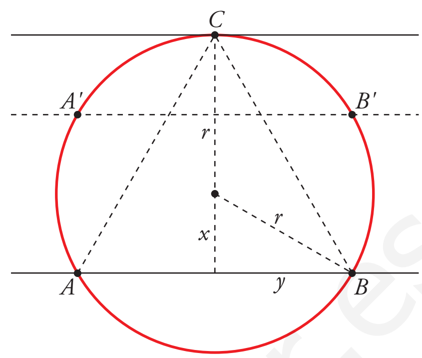
La tabla de los signos de la primera derivada es:



Por tanto, tiene un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$.

Para profundizar

78 En una circunferencia de radio r se traza la tangente en un punto cualquiera C y una cuerda AB paralela a dicha tangente. Demuestra que, para que el área del triángulo ABC sea máxima, la distancia de C a la cuerda debe ser 3/2 del radio.



- La altura del triángulo ha de ser mayor que el radio, pues, si trazamos la cuerda por $A'B'$, podemos conseguir otro triángulo con la misma base, AB, y mayor altura; y así, con mayor área.

- Espresamos el área del triángulo en función de x:

  $altura = x + r$

  $$\left.\begin{array}{l} base = 2y \\ y = \sqrt{r^2 - x^2} \end{array}\right\} \rightarrow base = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

  $$Área = \frac{2(x+r)\sqrt{r^2-x^2}}{2} = (x+r)\sqrt{r^2-x^2}$$

  $$A(x) = (x+r)\sqrt{r^2-x^2};\ \ x \in [0, r)$$

- Obtenemos el valor de x para el que $A(x)$ alcanza el máximo:

  $$A'(x) = \sqrt{r^2-x^2} + (x+r)\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{r^2-x^2-x(x+r)}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{r^2-x^2-x^2-rx}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{-2x^2-rx+r^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

  $$A'(x) = 0 \ \rightarrow\ -2x^2 - rx + r^2 = 0$$

  $$x = \frac{r \pm \sqrt{r^2+8r^2}}{-4} = \frac{r \pm \sqrt{9r^2}}{-4} = \frac{r \pm 3r}{-4} \begin{array}{l} x = -r \ \ \text{(no vale)} \\ x = -2r/-4 = r/2 \end{array}$$

  $\left(\text{En } x = \dfrac{r}{2} \text{ hay un máximo, pues } A'(x) > 0 \text{ a la izquierda de este valor y } A'(x) < 0 \text{ a su derecha}\right).$

- El máximo se alcanza en $x = \frac{r}{2}$.

  Por tanto, la distancia de C a la cuerda, que es la altura del triángulo, es:

  $$\text{h} = r + \frac{r}{2} = \frac{3r}{2}$$

- Observación:

  Vamos a calcular la longitud de los lados del triángulo:

  $$AB = base = 2\sqrt{r^2-x^2} = 2\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = r\sqrt{3}$$

  $$AC = BC = \sqrt{y^2 - \text{h}^2} = \sqrt{(r^2-x^2) + \left(\frac{3r}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4} + \frac{9r^2}{4}} = r\sqrt{3}$$

  Por tanto, hemos obtenido que el triángulo inscrito en una circunferencia que nos da el área máxima es el triángulo equilátero.

79 **Cuando un globo está a 200 m sobre el suelo y se eleva a 15 m/s, un automóvil pasa bajo él con velocidad de 45 km/h. ¿Con qué velocidad se separan coche y globo un segundo después?**

Ten en cuenta lo siguiente:

— El globo está a $200 + 15t$ m de altura en el instante t.

— El coche está a $(45/3{,}6) \cdot t$ m de la vertical del globo.

Halla la distancia entre ambos y averigua la velocidad de alejamiento cuando $t = 1$.

La distancia entre el coche y el globo en función del tiempo es:

$$d(t) = \sqrt{(200 + 15t)^2 + \left(\frac{45}{3{,}6}t\right)^2} = \sqrt{381{,}25t^2 + 6\,000t + 40\,000}$$

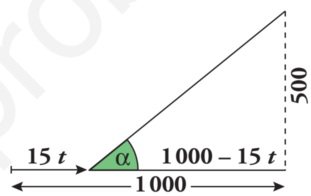
La velocidad de alejamiento es la derivada del espacio que los separa.

$$d'(t) = \frac{762{,}5t + 6\,000}{2\sqrt{381{,}25t^2 + 6\,000t + 40\,000}}$$

Al cabo de 1 segundo es:

$$d'(1) = \frac{762{,}5 + 6\,000}{2\sqrt{381{,}25 + 6\,000 + 40\,000}} = 15{,}7 \text{ m/s}$$

80 **Una torre está al final de una calle. Un hombre se dirige en automóvil hacia la torre a razón de 15 m/s. Sabiendo que la torre tiene 500 m de altura, ¿con qué velocidad varía el ángulo del observador respecto de la cumbre de la torre cuando dicho observador se encuentra a 1 000 m de la torre?**



— Halla $tg\,\alpha$ y, después, α.

— Averigua el valor de $\alpha'(t)$ para $t = 0$.

$$tg\,\alpha(t) = \frac{500}{1\,000 - 15t} = \frac{100}{200 - 3t}, \text{ siendo } t \geq 0.$$

$$tg\,\alpha(t) = arc\ tg\ \frac{100}{200 - 3t}$$

$$\alpha'(t) = \frac{300}{9t^2 - 1\,200t + 50\,000}$$

$$\alpha'(0) = \frac{300}{50\,000} = \frac{3}{500} \text{ rad/s}$$

Autoevaluación

Página 297

1 **Halla los puntos de la función:**

$$f(x) = \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

en los que la recta tangente sea paralela a la recta $y = 2x - 3$.

Para que la recta tangente sea paralela a la recta dada, la pendiente de la recta tangente debe ser 2.

$$f(x) = \ln (1 - \cos x) - \ln (1 + \cos x)$$

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + 1} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x - 1} = \frac{-2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x - 1} = \frac{-2 \operatorname{sen} x}{-\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{sen} x}$$

ya que $\operatorname{sen} x \neq 0$ (en caso contrario no estaría definida la función).

$$f'(x) = 2 \ \to\ \frac{2}{\operatorname{sen} x} = 2 \ \to\ \operatorname{sen} x = 1 \ \to\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \text{ con } \ k \in \mathbb{Z}.$$

2 **Calcula los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los de concavidad y convexidad de la función siguiente:**

$$f(x) = x|x - 2|$$

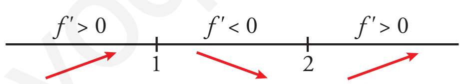
$$f(x) = x|x - 2| = \begin{cases} -x(x-2) & \text{si } x < 2 \\ x(x-2) & \text{si } x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La función no es derivable en $x = 2$ porque $f'(2^-) \neq f'(2^+)$.

$$f'(x) = 0 \ \to\ \begin{cases} -2x + 2 = 0 \ \to\ x = 1 < 2 \\ 2x - 2 = 0 \ \to\ x = 1 \not> 2 \end{cases}$$

La tabla de los signos de la derivada primera es:



La función es creciente en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(2, +\infty)$.

Es decreciente en el intervalo $(1, 2)$.

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

f es convexa es $(-\infty, 2)$ y cóncava en $(2, +\infty)$.

3 **Estudia el crecimiento de la función $f(x) = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$ y determina sus máximos y mínimos para $x \in [0, 2\pi]$.**

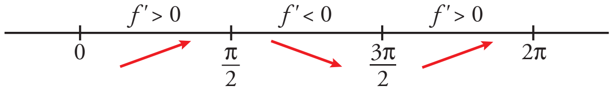
Consideramos la función: $f(x) = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$ para $x \in [0, 2\pi]$.

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) + e^x(-\operatorname{sen} x + \cos x) = e^x(2 \cos x) = 2e^x \cos x$$

$$f'(x) = 0 \ \to\ \cos x = 0 \ \to\ \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} \\[2mm] x = \dfrac{3\pi}{2} \end{array}\right\} \ (\text{para } x \in [0, 2\pi])$$

Signo de la derivada:



La función es creciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ y decreciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Tiene un máximo en $\left(\frac{\pi}{2}, e^{\pi/2}\right)$ y un mínimo en $\left(\frac{3\pi}{2}, -e^{3\pi/2}\right)$.

4 a) Estudia la curvatura de la siguiente función: $f(x) = x^2 \, ln \, x$

b) Escribe la ecuación de la recta tangente que pasa por su punto de inflexión.

a) • El dominio de definición de la función es $(0, +\infty)$.

• f es cóncava en los intervalos donde $f'' > 0$ y convexa si $f'' < 0$.

• Calculamos f' y f'':

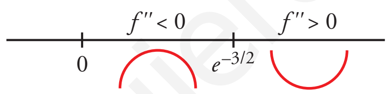
$$f(x) = x^2 \cdot ln \, x \rightarrow f'(x) = 2x \cdot ln \, x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \, ln \, x + 1)$$

$$f''(x) = 1 \cdot (2 \, ln \, x + 1) + x\left(2 \cdot \frac{1}{x}\right) = 2 \, ln \, x + 3$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 2 \, ln \, x + 3 = 0 \rightarrow ln \, x = -\frac{3}{2} \rightarrow x = e^{-3/2} \rightarrow f(e^{-3/2}) = -\frac{3}{2}e^{-3}$$

• Estudiamos el signo de f'' teniendo en cuenta el dominio de f, $(0, +\infty)$, y el punto donde $f''(x) = 0$, $x = e^{-3/2} \approx 0{,}22$:

Signo de la derivada:



• Conclusiones:

— f es convexa en $(0, e^{-3/2})$.

— f es cóncava en $(e^{-3/2}, +\infty)$.

— Punto de inflexión: $\left(e^{-3/2}, -\frac{3}{2}e^{-3}\right)$

b) • Pendiente de la recta tangente en $x = e^{-3/2}$:

$$m = f''(e^{-3/2}) = e^{-3/2}\,(2 \, ln \, e^{-3/2} + 1) = e^{-3/2}\left[2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 1\right] = -2e^{-3/2}$$

• Ecuación de la recta tangente en $\left(e^{-3/2}, -\frac{3}{2}e^{-3}\right)$:

$$y = -\frac{3}{2}e^{-3} - 2e^{-3/2}(x - e^{-3/2})$$

5 **Determina a, b, c y d para que la función:**

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tenga un máximo relativo en el punto (0, 4) y un mínimo relativo en el punto (2, 0).

$g(x)$ tiene un máximo relativo en $(0, 4) \rightarrow \begin{cases} g(0) = 4 \\ g'(0) = 1 \end{cases}$

$g(x)$ tiene un mínimo relativo en $(2, 0) \rightarrow \begin{cases} g(2) = 0 \\ g'(2) = 0 \end{cases}$

$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$g(0) = 4 \rightarrow d = 4$

$g'(0) = 0 \rightarrow c = 0$

$g(2) = 0 \rightarrow 8a + 4b + 4 = 0$

$g'(2) = 0 \rightarrow 12a + 4b = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 4a + 2b = -1 \\ 12a + 4b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = -2$$

La función buscada es $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 4$.

Es una función polinómica de tercer grado en la que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, luego (0, 4) es el máximo relativo y (2, 0) es el mínimo, por estar el primero a la izquierda del segundo.

6 **Calcula el punto de la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.**

La pendiente de la recta tangente a $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ en x es $f'(x)$. Tenemos que hallar el máximo de $f'(x)$.

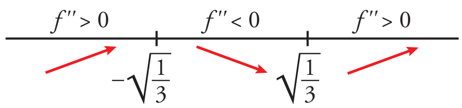
$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

Buscamos los puntos donde la derivada de $f''(x)$ es 0:

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \begin{cases} f'(\sqrt{3}/3) = (-3\sqrt{3})/8 \\ f'(-\sqrt{3}/3) = (3\sqrt{3})/8 \end{cases}$$

Estudio del signo de f'':



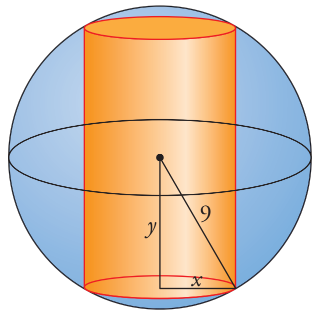
$\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

En $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ hay un máximo de $f'(x)$ y en $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ hay un mínimo de $f'(x)$.

Por tanto, el punto en el que la pendiente de la recta tangente es máxima es:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$$

7 **De todos los cilindros que pueden inscribirse en una esfera de 9 cm de radio, halla la altura y el radio del que tiene mayor volumen.**



Llamaremos x al radio del cilindro e y a la mitad de la altura. Entonces:

$$x^2 + y^2 = 81 \to y = \sqrt{81 - x^2} \text{ donde } x \in (0, 9).$$

El volumen del cilindro es:

$$V(x) = \pi x^2 \cdot 2\sqrt{81 - x^2} = 2\pi x^2 \sqrt{81 - x^2}$$

Para hallar el de volumen máximo calculamos el máximo relativo de la función anterior.

$$V'(x) = 2\pi\left(2x\sqrt{81 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{81 - x^2}}\right) = -6\pi\frac{x(x^2 - 54)}{\sqrt{81 - x^2}}$$

$$V'(x) = 0 \to x(x^2 - 54) = 0 \to x = 0 \text{ (no vale)}, \; x = -3\sqrt{6} \text{ (no vale)}, \; x = 3\sqrt{6}$$

Estudiamos los signos de $V'(x)$ cerca del punto singular:

$V' > 0$ | $V' < 0$; $3\sqrt{6}$ $\to$ En $x = 3\sqrt{6}$ hay un máximo relativo.

$$x = 3\sqrt{6} \to \text{radio} = 3\sqrt{6} \text{ cm}$$

$$y = 3\sqrt{3} \to \text{altura} = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$V(3\sqrt{6}) = 2\pi \cdot 54 \cdot \sqrt{81 - 54} \approx 1763 \text{ cm}^3$$

8 **La función $f(x) = 1 - |x|$ si $x \in [-2, 2]$ verifica la igualdad $f(-2) = f(2)$.**
Justifica si es posible encontrar algún $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

$$f(x) = 1 - |x| = \begin{cases} 1 + x & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

El teorema de Rolle dice que si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Comprobamos si la función f cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, 2]$:

- Veamos si f es continua en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} 1 + x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 1 - x = 1 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$$

  f es continua en $[-2, 2]$

- Estudiamos la derivabilidad de f:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

  $f'(1^-) \ne f'(1^+)$. f no es derivable en $x = 0 \to f$ no es derivable en $(-2, 2)$.

- f no cumple las hipótesis del teorema de Rolle; por tanto, no podemos asegurar que exista un $c \in (-2, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.