ÁLGEBRA

1.- a) Dada la matriz $M=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & a\\ a & 1 & a-1 & 1\\ a & 1 & 0 & a+2\end{pmatrix}$ determinar el rango de M en función del parámetro "a".

Tomamos un menor de orden: $\begin{vmatrix}1 & a\\ a & 1\end{vmatrix}=1-a^2=0\Rightarrow a=\pm 1.$

$\odot$ si $a\neq\pm1\Rightarrow$ ranM >2 orlamos $\left\langle\begin{array}{l}\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ a & 1 & a-1\\ a & 1 & 0\end{vmatrix}=a^3-a^2-a-1=(1-a)(1-a^2)=0\Rightarrow a=\pm1\Rightarrow ranM=3\\ \begin{vmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & 1\\ a & 1 & a+2\end{vmatrix}=\ldots.\end{array}\right.$

$\odot$ si a=1$\Rightarrow M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ $c_1=c_2,\ c_3=nula\ \wedge\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\Rightarrow ranM=2$

$\odot$ si a=-1$\Rightarrow M=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $c_2=c_4,\ f_1=-f_3\ \wedge\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix}=2\Rightarrow ranM=2$

Conclusión: $\mapsto$ si $a\neq\pm1\Rightarrow$ ranM=3 $\mapsto$ si a=1 $\vee$ a=-1$\Rightarrow$ ranM=2

b) Clasificar y resolver cuando sea posible el sistema $\begin{cases}x+ay=a\\ ax+y+(a-1)z=1\\ ax+y=a+2\end{cases}$

$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & a & 0 & a\\ a & 1 & a-1 & 1\\ a & 1 & 0 & a+2\end{array}\right)\Rightarrow|A|=(1-a)(1-a^2)=0\Rightarrow a=\pm1$

$\odot$ *si* $a\neq1\wedge a\neq-1\Rightarrow ranA=ranA^*=\text{n}=3\Rightarrow S.C.D$

$$x=\frac{1}{(1-a)(1-a^2)}\begin{vmatrix}a & a & 0\\ 1 & 1 & a-1\\ a+2 & 1 & 0\end{vmatrix}=\frac{a}{a-1}$$

$$y=\frac{1}{(1-a)(1-a^2)}\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ a & 1 & a-1\\ a & a+2 & 0\end{vmatrix}=\frac{a-2}{a-1}$$

$$z=\frac{1}{(1-a)(1-a^2)}\begin{vmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & 1\\ a & 1 & a+2\end{vmatrix}=\frac{a+1}{1-a}$$

$\odot$ si a=1 $\Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} c_1 = c_2,\ c_3 = nula \Rightarrow ranA = 1 \wedge \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow ranA^* = 2 \Rightarrow S.I.$

$\odot$ si a=-1 $\Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} c_2 = c_4,\ f_1 = -f_3 \Rightarrow ranA = ranA^* \neq 3 \wedge \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow ranA = ranA^* = 2 < n = 3 \Rightarrow S.C.I.$

$\begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y - 2z = 1 \end{cases} \quad x = \lambda \Rightarrow y = \lambda + 1 \Rightarrow z = 0 \quad Sol: (\lambda, \lambda+1, 0) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

2.- a) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

resolver la ecuación $A \cdot X - B \cdot C \cdot X = A$.

$AX - BCX = A \Leftrightarrow (A - BC)X = A \Leftrightarrow X = (A - BC)^{-1} A$

$A - BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - BC| = -1 \Rightarrow \exists (A - BC)^{-1} \Rightarrow (A - BC)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -13 & 21 \\ 8 & -9 & 16 \\ -10 & 12 & -18 \end{pmatrix}$

b) Sean la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y un número natural "n"

i) Calcular razonadamente D^n

$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2.2 & 1 \end{pmatrix} \quad D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2.3 & 1 \end{pmatrix} \cdots D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}$

Por inducción transfinita:

para n=2 es cierto, suponemos que se verifica para n-1, lo demostramos para n:

$D^n = D.D^{n-1} \underset{\text{por hipótesis de inducción}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2(n-1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}$

ii) Hallar $D^{60} - D^{10}$

$D^{60} - D^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 120 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 100 & 0 \end{pmatrix}$

GEOMETRÍA

3.- Considerar los planos $\pi_1 \equiv x-y+z=0$, $\pi_2 \equiv x+y-z-2=0$

a) **(2 puntos)** Determinar la posición relativa de π_1 y π_2.

$\pi_1 \equiv x-y+z=0 \quad \pi_2 \equiv x+y-z-2=0 \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} \Rightarrow$ se cortan

b) **(2 puntos)** Determinar el ángulo formado por los dos planos.

$$\angle(\pi_1,\pi_2) = \angle\left(\vec{n_1},\vec{n_2}\right) = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \left|\frac{(1,-1,1)(1,1,-1)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 70^{o}\ 31'\ 61''$$

c) **(3 puntos)** Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1,2,3) y NO CORTA a π_1 y π_2.

Si no corta a los planos quiere decir que es paralela a ellos y por lo tanto perpendicular

a sus vectores normales $\Rightarrow \vec{u} = \vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2j+2k \approx (0,1,1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=2+\lambda & \lambda\in\mathbb{R} \\ z=3+\lambda \end{cases}$

d) **(3 puntos)** Hallar el/los puntos de la recta $s=\pi_1 \cap \pi_2$ que equidisten de A(1,2,3) y B(1,1,2)

$s \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=\lambda+1 & \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow P_s(1,\lambda+1,\lambda)$ que equidiste de A(1,2,3) y B(1,1,2) $\Leftrightarrow$ d(P,A)=d(P,B) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda-1)^2+(3-\lambda)^2=(1-\lambda-1)^2+(2-\lambda)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (1-\lambda)^2+(3-\lambda)^2=\lambda^2+(2-\lambda)^2 \quad \Rightarrow \lambda=\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$P\left(1,\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$$

4.- Dadas las recta $r \equiv \begin{cases} x=(a+2)\lambda \\ y=1 \\ z=a \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$ y $s \equiv \dfrac{a-x}{1}=\dfrac{y-2}{a^3}=\dfrac{z-a}{a-1}$

a) **(3 puntos)** Determinar su posición relativa según los valores del parámetro "a".

$$\begin{cases} \vec{u_r}(a+2,0,0) \\ P_r(0,1,a) \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{u_s}(-1,a^3,a-1) \\ P_s(a,2,a) \end{cases} \rightarrow \vec{u_r} \parallel \vec{u_s} \Leftrightarrow \frac{a+2}{-1}=\frac{0}{a^3}=\frac{0}{a-1} \Rightarrow a+2=0 \Leftrightarrow a=-2$$

⊙ $si\ a=-2 \Rightarrow$ r y s deberían ser paralelas o coincidentes, pero para a=-2 el vector director de r queda (0,0,0) que es imposible $\Rightarrow$ la recta r no está definida para este valor de a.

⊙ $si\ a \neq -2 \Rightarrow$ r y s se cortan o se cruzan.

Estudiamos $ran\left(\vec{u_r},\vec{u_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right) \begin{vmatrix} a+2 & 0 & 0 \\ -1 & a^3 & a-1 \\ a & 1 & \end{vmatrix} = (1-a)(a+2)=0 \Rightarrow a=1 \vee a=-2,$

como para a=-2 no está definida r, será:

$\rightarrow$ si a=1 $ran\left(\vec{u_r},\vec{u_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right)=2 \Rightarrow$ se cortan. $\quad \rightarrow$ si a $\neq 1 \wedge$ a $\neq$ -2 $ran\left(\vec{u_r},\vec{u_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right)=3 \Rightarrow$ se cruzan.

b) **(3 puntos)** Para $a=2$, calcular la distancia entre r y s.

$$Para\ \ a=2 \begin{cases} \vec{u_r}(4,0,0) \approx (1,0,0) \\ P_r(0,1,2) \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{u}(-1,8,1) \\ P_s(2,2,2) \end{cases} \overrightarrow{P_rP_s}(2,1,0) \Rightarrow d(r,s)=\frac{\left\| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right\|}{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 1 \end{vmatrix} \right\|}=\frac{|-1|}{|(0,-1,8)|}=\frac{\sqrt{65}}{65}$$

c) **(4 puntos)** Para $a=2$, hallar la ecuación de la recta perpendicular a ambas.

$$Para\ \ a=2 \begin{cases} \vec{u_r}(4,0,0) \approx (1,0,0) \\ P_r(0,1,2) \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{u_s}(-1,8,1) \\ P_s(2,2,2) \end{cases}$$

Sea t la recta buscada, por ser perpendicular a r y s $\Rightarrow \vec{u_t}=\vec{u_r} \wedge \vec{u_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 1 \end{vmatrix}=-j+8k$

• $\pi_1 \equiv \begin{cases} r \subset \pi_1 \Leftrightarrow \vec{u_r}(1,0,0),\ P_r(0,1,2) \\ t \subset \pi_1 \Leftrightarrow \vec{u_t}(0,-1,8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 8 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi_1 \equiv -8y-z+10=0$

• $\pi_2 \equiv \begin{cases} s \subset \pi_2 \Leftrightarrow \vec{u_s}(-1,8,1),\ P_r(2,2,2) \\ t \subset \pi_2 \Leftrightarrow \vec{u_t}(0,-1,8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-2 \\ -1 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 8 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi \ \equiv 65x+8y+z-148=0$

La recta pedida es $\pi_1 \cap \pi_2 \Leftrightarrow t \equiv \begin{cases} 8y+z-10=0 \\ 65x+8y+z-148=0 \end{cases}$