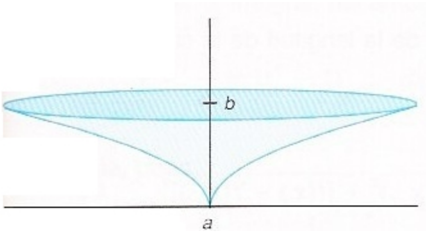
Si al trozo de curva $y = f(x)$ se le hace girar alrededor del eje Y, el volumen del cuerpo de revolución vendrá dado por esta otra expresión: $\boxed{Vol = \int_b^a \pi \cdot \phi(y)^2\, dy}$

Se hace exactamente igual que al girar en torno al eje X, con la salvedad de que hay que escribir x en función de y, e integrar en y.

Ejemplo 19: Calcular el volumen engendrado por la curva $y = \sqrt{x}$ al girar alrededor del eje Y, entre y=0 e y=2.



$$Volumen = \pi \int_0^2 \left(y^2\right)^2 dy = \pi \int_0^2 y^4 dy = \left[\pi \frac{y^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32}{5}\pi$$

7.- Ejercicios:

1.- Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{(x-1)^2}$ b) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ c) $\int \frac{\ln x^2}{x} dx$ d) $\int sen^2 x \cdot \cos 3x dx$ e) $\int tgx dx$

f) $\int \frac{1}{x^2+9} dx$ g) $\int sen^3 x dx$ h) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$ i) $\int \frac{x}{x^4+9} dx$ j) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

2.- Hallar la función F(x) tal que F(0)=2 y que sea primitiva de la función $f(x) = \frac{e}{e^x+1}$

3.- Determinar f(x) sabiendo que f'''(x)=24x; f''(0)=2, f'(0)=1 y f(0)=0.

4.- Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^2-x+1}{x^3+x} dx$ b) $\int \frac{x^2+10x+5}{x^3+3x^2-x-3} dx$ c) $\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x} dx$

5.- Calcular las siguientes integrales: a) $\int x \cdot arctg x dx$ b) $\int e^{-x} \cos x dx$

c) $\int x^2 \cos x dx$ d) $\int x e^{4x} dx$ e) $\int x^3 e^{-x^2} dx$ f) $\int sen(\ln x) dx$

6.- Calcular: a) $\int_1^3 |x| dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} senx \cdot \cos 2x dx$ c) $\int_0^{\pi} (1+x^2)\cos x dx$

d) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$ e) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ f) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$

7.- Siendo $I = \int_0^x t^2 e^{-t} dt$, demostrar que $\lim_{x \to +\infty} I(x) = 2$

8.- Calcular el área encerrada por la curva $f(x) = x^2 - 4x$ y la recta $g(x) = 2x - 5$

9.- Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=1+\frac{x}{3}$ y $g(x)=(x+1)^{\frac{1}{2}}$

10.- Determinar el área encerrada entre las gráficas de las funciones de ecuaciones:

$$f(x)=6x-x^2 \text{ y } g(x)=x^2-2x .$$

11.- Calcular el área encerrada por la gráfica de $f(x)=\frac{1}{4+x^2}$, el eje de abscisas y las rectas: $x=2\sqrt{3}$ y $x=2$

12.- Calcular el área del recinto limitado por la curva de la ecuación $f(x)=x^2+x$ y la recta perpendicular a su tangente en el punto (0,0).

13.- Se considera la función $f(x)=xe^{ax}$, donde a es una constante no nula. Calcula el valor de a, sabiendo que el área limitada por la curva $f(x)=xe^{ax}$ y las rectas x=0 y x=1 es igual a $\frac{1}{a^2}$.

14.- Calcula la primitiva de la función $f(x)=\left[\ln x\right]^2$ que se anule en $x=e$

15.- Calcula las siguientes integrales inmediatas:

a) $\int(2x^2-4x+5)dx$

b) $\int\left[\frac{x^4-3x\sqrt{x}+2}{x}\right]dx$

c) $\int\frac{3x}{x^2+5}dx$

d) $\int\frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}dx$

e) $\int\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$

f) $\int\frac{dx}{4+7x^2}dx$

g) $\int\frac{3}{\sqrt{4-x^2}}dx$

h) $\int\left(3x+\frac{1}{x^2}\right)dx$

i) $\int\frac{(1+x)^2}{x}dx$

j) $\int\frac{4x+8}{x^2+4x}dx$

k) $\int\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}dx$

l) $\int 3x\cdot 3^{x^2}dx$

m) $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx$

n) $\int sen^3 2x\cdot\cos 2x\cdot dx$

ñ) $\int\left(2\sqrt[4]{x^3}-\frac{5}{x}\right)dx$

o) $\int(2x^2+3)^2\cdot 5x\cdot dx$

p) $\int 4x^2\sqrt{1-x^3}dx$

q) $\int\frac{1-\cos 2x}{2x-sen2x}dx$

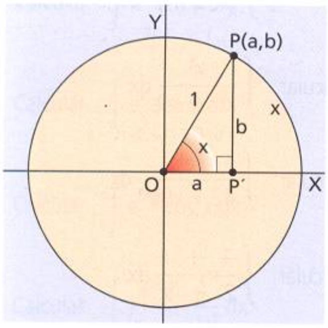
r) $\int\frac{e^{\ln x}}{x}dx$

s) $\int\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$

t) $\int\frac{1-\ln x}{x\cdot\ln x}dx$

8.- Apéndice:

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS



$$\text{sen } x = b = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \text{cosec } x = \frac{1}{b} = \frac{1}{\text{sen } x}$$

$$\cos x = a = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \sec x = \frac{1}{a} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{tg } x = \frac{b}{a} = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \text{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \text{ctg } x = \frac{a}{b} = \frac{1}{\text{tg } x} = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

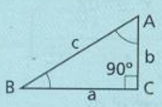
$\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$ (T. de Pitágoras)

$1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$

$1 + \text{cotg}^2 x = \text{cosec}^2 x$

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
Suma	$\text{sen}(x + y) = \text{sen } x \cos y + \cos x \text{ sen } y$	$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \text{sen } x \text{ sen } y$	$\text{tg}(x + y) = \dfrac{\text{tg } x + \text{tg } y}{1 - \text{tg } x \text{ tg } y}$
Diferencia	$\text{sen}(x - y) = \text{sen } x \cos y - \cos x \text{ sen } y$	$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \text{sen } x \text{ sen } y$	$\text{tg}(x - y) = \dfrac{\text{tg } x - \text{tg } y}{1 + \text{tg } x \text{ tg } y}$
Doble	$\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x$	$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 1 - 2 \text{ sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$	$\text{tg } 2x = \dfrac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}$
Mitad	$\text{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$	$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$	$\text{tg}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$
Producto	$\text{sen } x \cos y = \dfrac{\text{sen}(x - y) + \text{sen}(x + y)}{2}$	$\text{sen } x \text{ sen } y = \dfrac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$	$\cos x \cos y = \dfrac{\cos(x - y) + \cos(x + y)}{2}$

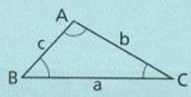
TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS



1. $C = 90°$ $\quad A + B = 90°$
2. $\text{sen } A = \cos B = \dfrac{a}{c}$, $\text{sen } B = \cos A = \dfrac{b}{c}$

   $\text{tg } B = \dfrac{b}{a}$, $\text{tg } A = \dfrac{a}{b}$
3. $c^2 = a^2 + b^2$ (T. de Pitágoras)

TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS



1. $A + B + C = 180°$
2. $\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} = \dfrac{c}{\text{sen } C} = 2R$ (T. del seno)
3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

   $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

   $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

   (T. del coseno)

Equivalencia de radianes y grados

Rad		Grad
2π	$\Leftrightarrow$	$360°$
π	$\Leftrightarrow$	$180°$
$\pi/2$	$\Leftrightarrow$	$90°$
$\pi/4$	$\Leftrightarrow$	$45°$
$2\pi/3$	$\Leftrightarrow$	$120°$
$\pi/3$	$\Leftrightarrow$	$60°$
$\pi/6$	$\Leftrightarrow$	$30°$
$3\pi/2$	$\Leftrightarrow$	$270°$

8.- Soluciones

1.- Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{-1}{x-1} + C$

b) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \frac{1}{x} \ln^2 x dx = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$

c) $\int \frac{\ln x^2}{x} dx = 2\int \frac{\ln x}{x} dx = 2\int \frac{1}{x}\ln x dx = \frac{\ln^2 x}{4} + C$

$\int sen^2 x \cdot \cos 3x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) \cdot \cos 3x dx = \int \left(\frac{\cos 3x}{3} - \frac{1}{2}\cos 2x \cdot \cos 3x\right) dx =$

d) $= \int \frac{\cos 3x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(-x)+\cos(5x)}{2}\right) dx = \int \frac{\cos 3x}{2} dx - \int \frac{\cos(-x)}{4} dx + \int \frac{\cos 5x}{4} dx =$

$= \frac{sen(3x)}{6} + \frac{sen(5x)}{20} + \frac{sen(-x)}{4} = \frac{sen(3x)}{6} + \frac{sen(5x)}{20} - \frac{sen(x)}{4} + C$

e) $\int tgx dx = \int \frac{senx}{\cos x} dx = -\int \frac{-senx}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$

f) $\int \frac{1}{x^2+9} dx = \int \frac{1}{x^2+3^2} dx = \frac{1}{3} arctg\left(\frac{x}{3}\right) + C$

g) $\int sen^3 x dx = \int senx(1-\cos^2 x) dx = \int senx dx - \int senx \cdot \cos^2 x dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$

h) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} dx = \frac{1}{2} arcsen(x^2) + C$

i) $\int \frac{x}{x^4+9} dx = \int \frac{x}{(x^2)^2+9} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2)^2+9} dx = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{x^2}{3}\right) + C$

j) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \int \frac{dx}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}} = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^x}{e^{2x}+1} dx = \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right) + C$

2.- Hallar la función F(x) tal que F(0)=2 y que sea primitiva de la función $f(x) = \frac{e}{e^x+1}$

Calculamos la integral de $\int \frac{e}{e^x+1} dx = e\int \frac{1}{e^x+1} dx =$

Hacemos un cambio de variable $\left[e^x = t \quad \begin{matrix} e^x dx = dt \\ dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t} \end{matrix} \right]$, por tanto la integral queda:

$$\int \frac{1}{t^2+t} dt = \int \frac{A}{t} dt + \int \frac{B}{t+1} dt = \begin{bmatrix} 1 = A(t+1) + Bt \\ si\ t = 0 \to 1 = A \\ si\ t = -1 \to 1 = -B \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t+1} dt = \ln|t| - \ln|t+1| = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right|$$

Deshacemos el cambio:

$\ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|$, y multiplicamos por e, de forma que:

$$\int \frac{e}{e^x+1} dx = e\int \frac{1}{e^x+1} dx = \ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|^e + C$$

Como F(0)=2;

$$e\ln\frac{1}{2} + C = 2 \Rightarrow C = 2 - e\ln\frac{1}{2}$$

De forma que:

$$\boxed{\int \frac{e}{e^x+1}dx = \ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right|^{e} + 2 - e\ln\frac{1}{2}}$$

3.- Determinar f(x) sabiendo que f'''(x)=24x; f''(0)=2, f'(0)=1 y f(0)=0.

$f''(x) = \int 24x dx = 12x^2 + C$ Como f''(0)=2, entonces C=2 ➔ $f''(x) = 12x^2 + 2$

$f'(x) = \int (12x^2 + 2)dx = 4x^3 + 2x + C'$, Como f'(0)=1, entonces C'=1 ➔ $f'(x) = 4x^3 + 2x + 1$

Y por último:

$f(x) = \int (4x^3 + 2x + 1)dx = x^4 + x^2 + x + C''$, Como f(0)=0, ➔ C''=0 y $\boxed{f(x) = x^4 + x^2 + x}$

4.- Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x}dx$

Como grado del polinomio de arriba es menor que el de abajo no es necesario dividir.

$\frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2+1} \to x^2 - x + 1 = A(x^2 + 1) + B(x)$

Si x=0 ➔ 1=A

Si x=1 ➔ 1=2A+B ➔ B=-1

Por tanto:

$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = \ln|x| - arctg(x) + C$

b) $\int \frac{x^2 + 10x + 5}{x^3 + 3x^2 - x - 3}dx$

Como grado del polinomio de arriba es menor que el de abajo no es necesario hacer la división euclídea.

Sacamos las raíces de $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$; Hacemos Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 3 & -1 & -3 \\
1 & & 1 & 4 & 3 \\
\hline
 & 1 & 4 & 3 & \underline{|0} \\
-3 & & -3 & -3 & \\
\hline
 & 1 & 1 & \underline{|0} &
\end{array}$$

Por tanto: $x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x+1)\cdot(x+3)\cdot(x-1)$

Descomponemos:

$$\frac{x^2 + 10x + 5}{x^3 + 3x^2 - x - 3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + 10x + 5 = A(x+1)\cdot(x+3) + B(x-1)\cdot(x+3) + C(x-1)\cdot(x+1)$$

Si x=1 ➔ 16=8A ➔ A=2

Si x=-1 ➔ -4=-4B ➔ B=1

Si x=-3 ➔ -16=8C ➔ C=-2

Por tanto:

$$\int \frac{x^2+10x+5}{x^3+3x^2-x-3}dx = \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{-2}{x+3}dx = 2\ln|x-1| + \ln|x+1| - \ln|x+3| + C$$

c) $\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$

En este caso, tenemos que el grado del numerador (arriba) es mayor que el grado del denominador (abajo), por tanto es necesario hacer la división euclídea.

$$\frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x} = (x-2) - \frac{7x+2}{x^3-x^2-2x}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \int (x-2)dx - \int \frac{7x+2}{x^3-x^2-2x}dx$$

Vamos a calcular primero:

$$\int \frac{7x+2}{x^3-x^2-2x}dx$$

Descomponemos el denominador en raíces:

$$x^3-x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x^2-x-2)=0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+1)=0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 2 \\ -1 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\frac{7x+2}{x^3-x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} \Rightarrow 7x+2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$$

Sustituyendo los valores de las raíces obtenemos:

Si x=0 ➔ 2 = -2A ➔ A=-1
Si x=2 ➔ 16 = 6B ➔ B=8/3
Si x=-1 ➔ -5 = 3C ➔ C=-5/3

Entonces:

$$\int \frac{7x+2}{x^3-x^2-2x}dx = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x-2}dx + \int \frac{C}{x+1}dx = -\int \frac{dx}{x} + \frac{8}{3}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x+1} =$$
$$= -\ln|x| + \frac{8}{3}\ln|x-2| - \frac{5}{3}\ln|x+1|$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \int (x-2)dx - \int \frac{7x+2}{x^3-x^2-2x}dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| - \frac{8}{3}\ln|x-2| + \frac{5}{3}\ln|x+1| + C$$

5.- Calcular las siguientes integrales:

a)
$$\int x\cdot arctgx dx = \begin{bmatrix} u = arctgx & du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = x & v = \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2 Arctg(x)}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$
$$= \frac{x^2 Arctg(x)}{2} - \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{x^2 Arctg(x)}{2} - \frac{1}{2}x + Arctg(x) + C$$

b)
$$\int e^{-x}\cos x dx = \begin{bmatrix} u = e^{-x} & du = -e^{-x}dx \\ dv = \cos x & v = senx \end{bmatrix} = e^{-x}senx + \int e^{-x}senx dx = e^{-x}senx +$$
$$+\begin{bmatrix} u = e^{-x} & du = -e^{-x}dx \\ dv = senx & v = -\cos x \end{bmatrix} - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x dx$$

Tenemos una integral que en la que volvemos a la original (cíclica). Por tanto:

$$I = e^{-x}senx - e^{-x}\cos x - I \Rightarrow I = \frac{e^{-x}senx - e^{-x}\cos x}{2} + C$$

c)
$$\int x^2\cos x dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = \cos x & v = senx \end{bmatrix} = x^2 senx - 2\int xsenx dx = x^2 senx -$$
$$-\begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = senx & v = -\cos x \end{bmatrix} + x\cos x + \int \cos x dx =$$
$$= x^2 senx + 2x\cos x - 2senx = 2x\cos x + (x^2-2)senx + C$$

d)
$$\int xe^{4x}dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{4x} & v = \dfrac{1}{4}e^{4x} \end{bmatrix} = \frac{xe^{4x}}{4} - \frac{1}{4}\int e^{4x}dx = \frac{xe^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16} + C$$

e)
$$\int x^3 e^{-x^2}dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = xe^{-x^2} & v = \dfrac{-1}{2}e^{-x^2} \end{bmatrix} = -\frac{x^2 e^{-x^2}}{2} + \int xe^{-x^2}dx = -\frac{x^2 e^{-x^2}}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2} = -\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1) + C$$

f)
$$\int sen(\ln x)dx = \begin{bmatrix} u = sen(\ln x) & du = \cos(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} = xsen(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx = xsen(\ln x) -$$
$$-\begin{bmatrix} u = \cos(\ln x) & du = -sen(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} = -x\cos(\ln x) - \int sen(\ln x)dx$$

Volvemos a tener una integral cíclica:

$$I = xsen(\ln x) - x\cos(\ln x) - I \Rightarrow I = \frac{xsen(\ln x) - x\cos(\ln x)}{2} + C$$

6.- Calcular:

a) $\int_1^3 |x|dx = \int_1^3 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{1}{2}(9-1) = 4$

b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} senx\cdot\cos 2xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} senx\cdot\left(2\cos^2 x-1\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} senx\cdot\cos^2 xdx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} senxdx = 2\left[-sen^3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}$$

c) $\int_0^{\pi}(1+x^2)\cos xdx = \int_0^{\pi}\cos xdx + \int_0^{\pi}x^2\cos xdx = -2\pi$

d)

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int x^3\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = x\left(1-x^2\right)^{\frac{-1}{2}} & v = -\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = -x^2\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \int 2x\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= -x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{2\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3}\left(x^2+2\right)+C$$

e)

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = Arcsenx - \int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$Arcsenx - \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = x(1-x^2)^{\frac{-1}{2}} & v = -\sqrt{1-x^2} \end{bmatrix} = Arcsenx + x\sqrt{1-x^2} - \int\sqrt{1-x^2}dx$$

Esta es cíclica, por tanto:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}dx = \left[\frac{Arcsenx}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[x\sqrt{1-x^2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

f) $\int_0^1\frac{dx}{e^x+1} =$; Calcularemos primero la primitiva:

$$\int\frac{dx}{e^x+1} = \begin{bmatrix} e^x = t & e^xdx = dt \\ & dx = \dfrac{dt}{t} \end{bmatrix} = \int\frac{dt}{(t+1)\cdot t} = \int\frac{A}{t+1}dt + \int\frac{B}{t}dt \Rightarrow 1 = At + B(t+1)$$

Si t=0 ➔ 1=B
Si t=-1 ➔ 1=-A

$$\int\frac{dt}{(t+1)\cdot t} = -\int\frac{1}{t+1}dt + \int\frac{1}{t}dt = -\ln|t+1| + \ln|t|$$

Si deshacemos el cambio:

$$\int_0^1\frac{dx}{e^x+1} = \left[-\ln\left(e^x+1\right)+\ln\left(e^x\right)\right]_0^1 = 1-\ln(e+1)-\ln(2)$$

7.- Siendo $I = \int_0^x t^2e^{-t}dt$ ***, demostrar que*** $\lim_{x\to+\infty} I(x) = 2$

Vamos a calcular la Integral:

$$\int t^2e^{-t}dt = \begin{bmatrix} u = t^2 & du = 2tdt \\ dv = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{bmatrix} = -e^{-t}t^2 + 2\int te^{-t}dt = -e^{-t}t^2 + \begin{bmatrix} u = 2t & du = 2dt \\ dv = e^{-t} & v = -e^{-t} \end{bmatrix} =$$

$$= -e^{-t}t^2 - 2te^{-t} + 2\int e^{-t}dt = -e^{-t}t^2 - 2te^{-t} - 2e^{-t} = -e^{-t}(t^2+2t+2)$$

Por tanto:

$$I=\int_0^x t^2e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\left(t^2+2t+2\right)\right]_0^x=\left[-\frac{x^2+2x+2}{e^x}+\frac{2}{1}\right]$$

Por tanto: $\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x^2+2x+2}{e^x}+\frac{2}{1}\right]=2$ como queríamos demostrar.

8.- Calcular el área encerrada por la curva $f(x)=x^2-4x$ ***y la recta*** $g(x)=2x-5$

Definimos la función $h(x)=f(x)-g(x)=x^2-6x+5$
Igualamos a cero, para calcular sus puntos de corte.
$h(x)=f(x)-g(x)=x^2-6x+5=0\Leftrightarrow(x-1)(x-5)=0$
Por tanto sus raíces son 1 y 5.

Integramos h entre 1 y 5
$\int_1^5\left(x^2-6x+5\right)dx=\frac{-32}{3}$
Como un área no puede ser negativa, $A=\left|\int_1^5\left(x^2-6x+5\right)dx\right|=\left|\frac{-32}{3}\right|=\frac{32}{3}$

9.- Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=1+\frac{x}{3}$ ***y*** $g(x)=\left(x+1\right)^{\frac{1}{2}}$

Al igual que en el ejercicio anterior, definimos la función h(x):
$h(x)=f(x)-g(x)=1+\frac{x}{3}-\sqrt{x+1}$
Igualamos a cero para encontrar sus puntos de corte:
$h(x)=f(x)-g(x)=1+\frac{x}{3}-\sqrt{x+1}=0\Leftrightarrow x=3;x=0$
Por tanto ya tenemos los límites de integración.

$\int_0^3\left(1+\frac{x}{3}-\sqrt{x+1}\right)dx=-\frac{1}{6}$
Como las áreas no son nunca negativas: Área = $\left|\int_0^3\left(1+\frac{x}{3}-\sqrt{x+1}\right)dx\right|=\left|-\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}$

10.- Determinar el área encerrada entre las gráficas de las funciones de ecuaciones $f(x)=6x-x^2$ ***y*** $g(x)=x^2-2x$ ***.***

Como siempre, definimos la función h(x) como la diferencia entre f y g:

$$h(x)=f(x)-g(x)=8x-2x^2$$

Igualamos a cero para obtener los extremos de los intervalos de integración:

$$h(x)=8x-2x^2=0\Leftrightarrow x=0;x=4$$

Por tanto: $Area=\int_0^4\left(8x-2x^2\right)dx=\frac{64}{3}$

11.- Calcular el área encerrada por la gráfica de $f(x)=\frac{1}{4+x^2}$, el eje de abscisas y las rectas $x=2\sqrt{3}$ y $x=2$

La función f(x) es siempre positiva, por tanto la integral es positiva:

Tenemos que calcular: $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{4+x^2}=\left[\frac{1}{2}Arctg\left(\frac{x}{2}\right)\right]_2^{2\sqrt{3}}=\left(\frac{1}{2}Arctg\sqrt{3}-\frac{1}{2}Arctg(1)\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{24}$

12.- Calcular el área del recinto limitado por la curva de la ecuación $f(x)=x^2+x$ y la recta perpendicular a su tangente en el punto (0,0).

Lo primero es calcular la recta tangente en el punto (0,0)

La ecuación de la recta tangente es: y = mx + b, donde m es la pendiente f'(a) y b es la ordenada en el origen b = f(a).

En este caso: f'(x)=2x + 1; f'(0)=1; f(0)=0; por tanto la recta tangente en el (0,0) es y = x

La recta perpendicular a esta es: y = -x.

Así que tenemos que calcular el área entre la gráfica f(x)= x^2 + x y g(x) = - x

Definimos la función h(x):

$$h(x)=f(x)-g(x)=x^2+x-(-x)=x^2+2x$$

Igualamos a cero para encontrar las soluciones:

$$h(x)=x^2+2x=0 \Leftrightarrow x=0, x=-2$$

Integramos la función h entre esos dos valores:

$$\int_{-2}^{0}\left(x^2+2x\right)dx=-\frac{4}{3}$$

Como el área no puede ser negativa:

$$Area=\left|\int_{-2}^{0}\left(x^2+2x\right)dx\right|=\left|-\frac{4}{3}\right|=\frac{4}{3}$$

13.- Se considera la función $f(x)=xe^{ax}$, donde a es una constante no nula. Calcula el valor de a, sabiendo que el área limitada por la curva $f(x)=xe^{ax}$ y las rectas x=0 y x=1 es igual a $\frac{1}{a^2}$.

Tenemos que $\int_0^1 xe^{ax}dx=\frac{1}{a^2}$; Vamos a resolver la integral:

$$\int_0^1 xe^{ax}dx=\begin{bmatrix} u=x & du=dx \\ dv=e^{ax} & v=\frac{1}{a}e^{ax}\end{bmatrix}=\frac{x}{a}e^{ax}-\frac{1}{a}\int e^{ax}dx=\left[\frac{x}{a}e^{ax}-\frac{e^{ax}}{a^2}\right]_0^1=\frac{e^a}{a}-\frac{e^a}{a^2}+\frac{1}{a^2}$$

Y según el enunciado:

$$\frac{e^a}{a}-\frac{e^a}{a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^2}\Rightarrow\frac{1}{a}=\frac{1}{a^2}\Leftrightarrow a^2-a=0\Leftrightarrow a=0;a=1$$

Por tanto a=1, porque no puede ser igual a cero.

14.- Calcula la primitiva de la función $f(x)=\left[\ln x\right]^2$ que se anule en $x=e$

Calculamos la integral indefinida de f(x)

$$\int\left[\ln x\right]^2dx=\begin{bmatrix} u=\ln x & du=\dfrac{1}{x} \\ dv=\ln x & v=x\left(\ln x-1\right)\end{bmatrix}=x\ln x\left(\ln x-1\right)-\int\left(\ln x-1\right)dx=x\ln x\left(\ln x-1\right)-$$

$$-x\left(\ln x-1\right)+x=x\left[\ln x\right]^2-2x\ln x+2x+K$$

Como tiene que ocurrir que $f(e)=0$, entonces: $e-2e+2e+k=0\Leftrightarrow k=-e$

Por tanto la primitiva pedida es es: $x\left[\ln x\right]^2-2x\ln x+2x-e$

15.- Calcula las siguientes integrales inmediatas:

a) $\int\left(2x^2-4x+5\right)dx$

$\frac{2}{3}x^3-2x^2+5x+C$

b) $\int\left[\frac{x^4-3x\sqrt{x}+2}{x}\right]dx$

$\frac{x^4}{4}-2x\sqrt{x}+2\ln|x|+C$

c) $\int\frac{3x}{x^2+5}dx$

$\frac{3}{2}\ln\left(x^2+5\right)+C$

d) $\int\frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}dx$

$\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+1}+C$

e) $\int\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$

$2\cdot sen\left(\frac{x}{2}\right)+C$

f) $\int\frac{dx}{4+7x^2}dx$

$\frac{\sqrt{7}}{14}Arctg\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right)+C$

g) $\int\frac{3}{\sqrt{4-x^2}}dx$

$3\cdot Arcsen\left(\frac{x}{2}\right)+C$

h) $\int\left(3x+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{x}+C$

i) $\int\frac{\left(1+x\right)^2}{x}dx$

$\frac{x^4}{4}+x^2+\ln|x|+C$

j) $\int\frac{4x+8}{x^2+4x}dx$

$2\ln\left|x^2+4x\right|+C$

k) $\int\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}dx$

$\frac{2\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{3}+C$

l) $\int 3x\cdot 3^{x^2}dx$

$\frac{3^{x^2+1}}{2\ln 3}+C$

m) $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx$

$\frac{1}{4}Arcsenx^4+C$

n) $\int sen^3 2x\cdot\cos 2x\cdot dx$

$\frac{sen^4 2x}{8}+C$

ñ) $\int\left(2\sqrt[4]{x^3}-\frac{5}{x}\right)dx$

$\frac{8}{7}x\sqrt[4]{x^3}-5\ln|x|+C$

o) $\int\left(2x^2+3\right)^2\cdot 5x\cdot dx$

p) $\int 4x^2\sqrt{1-x^3}dx$

q) $\int\frac{1-\cos 2x}{2x-sen2x}dx$

r) $\int\frac{e^{\ln x}}{x}dx$

s) $\int\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$

t) $\int\frac{1-\ln x}{x\cdot\ln x}dx$