# Unidad 14 – Integrales indefinidas

## PÁGINA 339

**cuestiones iniciales**

**1.** Una función $F$ es primitiva de otra $f$ siempre y cuando la derivada de $F$ sea $f$, es decir:

$$F \text{ es primitiva de } f \iff F' = f$$

Encuentra dos primitivas de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x$

c) $f(x) = e^{-x}$

d) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$

**2.** Comprueba, en cada caso, que $F$ es primitiva de $f$:

a) $F(x) = -\ln(1-x) - \operatorname{arctg} x + 7$

$f(x) = \dfrac{x^2 + x}{(1-x)(1+x^2)}$

b) $F(x) = \dfrac{(2-x)\operatorname{sen}(2x)}{2} - \dfrac{1}{4}\cos(2x) - \sqrt{3}$

$f(x) = (2-x)\cos(2x)$

SOLUCIONES

1. La solución es:

a) primitivas de $f(x) = 2x$ son:

$F(x) = x^2 + 7; \quad G(x) = x^2 - \sqrt{2}$

b) primitivas de $f(x) = \operatorname{sen}\ x$ son:

$F(x) = -\cos x + \dfrac{1}{3}; \quad G(x) = -\cos x$

c) primitivas de $f(x) = e^{-x}$ son:

$F(x) = -e^{-x} + \sqrt{5}; \quad G(x) = -e^{-x} - 3$

d) primitivas de $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$ son:

$F(x) = 3 \cdot \ln|x+2| - \dfrac{3}{2}; \quad G(x) = 3\ln|x+2| + 1$

2. La solución en cada caso:

a) veamos que $F'(x) = f(x)$

$$F(x) = -ln\,(1 - x) - arc\ tg\ x + 7$$

$$F(x) = -\frac{-1}{1 - x} - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 + x^2} =$$

$$= \frac{1 + x^2 - (1 - x)}{(1 - x)(1 + x^2)} = \frac{x^2 + x}{(1 - x)(1 + x^2)} = f(x)$$

b) veamos que $F'(x) = f(x)$.

$$F(x) = \frac{(2 - x) \cdot sen\,(2x)}{2} - \frac{1}{4}\,cos(2x) - \sqrt{3}$$

$$F(x) = \frac{-sen\ 2x}{2} + 2 \cdot \frac{cos(2x) \cdot (2 - x)}{2} -$$

$$-\frac{1}{4}\,[-2\ sen\,(2x)] = \frac{-sen\ 2x}{2} + (2 - x) \cdot cos(2x) +$$

$$+\frac{1}{2}\,sen\,(2x) = (2 - x) \cdot cos\,(2x) = f(x)$$

## PÁGINA 353

ACTIVIDADES

■ Utiliza el método de inducción para resolver las siguientes actividades:

**1. Matrices.** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Demuestra que $A^n = 3^{n-1} \cdot A$.

**2. Múltiplo de 5.** Demostrar que $n^5 - n$ es múltiplo de 5 para cualquier valor de $n$.

**3. Suma de cubos.** Demuestra que para cualquier número natural $n$ se verifica: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

SOLUCIONES

1. Siguiendo el método de inducción y sabiendo que la igualdad es cierta para valores pequeños de n, damos por supuesto que es cierta par aun valor cualquiera y demostramos que también lo es para el siguiente.
    - Para $n=1$ vemos que la igualdad es cierta pues $A=3^{º} \cdot A$
    - Para $n=2$ calculamos $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot A$
    - Suponemos que es cierta para $n=p$, es decir: $A^p = 3^{p-1} \cdot A$
    - Hemos de ver que también es cierta para $n=p+1$, es decir hemos de probar que: $A^{p+1} = 3^p \cdot A$

    Para ello calculamos esta matriz $A^{p+1} = A^p \cdot A = 3^{p-1} \cdot A \cdot A = 3^{p-1} \cdot 3 \cdot A = 3^p \cdot A$ que es lo que queríamos demostrar.

    Con esto hemos demostrado que la igualdad es cierta para $p+1$. Por tanto podemos afirmar que es cierta $\forall\, n \in N$.

2. Siguiendo el método de inducción y sabiendo que $n^5 - n$ es múltiplo de 5 es cierto para valores pequeños de n, damos por supuesto que es cierto para un valor cualquiera y demostramos que también lo es para el siguiente.
    - Para $n = 1$ vemos que la igualdad es cierta pues $1^5 - 1$ = múltiplo de 5
    - Para $n = 2$, $2^5 - 2 = 30$ = múltiplo de 5
    - Suponemos que es cierta para $n = p$, es decir:

$$p^5 - p = \text{múltiplo de } 5$$

- Hemos de ver que también es cierta para n = p+1, es decir hemos de probar que:

$$(p+1)^5 - (p+1) = \text{múltiplo de } 5$$

Para ello operamos y obtenemos:

$(p+1)^5 - (p+1) = p^5 + 5p^4 + 10p^3 + 10p^2 + 5p + 1 - p - 1 =$

$(p^5 - p) + 5(p^4 + 2p^3 + 2p^2 + p) =$ múltiplo de 5 + múltiplo de 5 = múltiplo de 5

Y eso es lo que queríamos demostrar.

Con esto hemos demostrado que la igualdad es cierta para p + 1. Por tanto podemos afirmar que es cierta $\forall\, n \in N$.

3. Siguiendo el método de inducción y sabiendo que la igualdad es cierta para valores pequeños de *n*, damos por supuesto que es cierta para un valor cualquiera y demostramos que también lo es para el siguiente.

- Para n = 1 la igualdad es cierta $1 = \frac{1(1+1)^2}{4}$

- Para n = 2 la igualdad es cierta pues $1^3 + 2^3 = \frac{2^2(2+1)^2}{4}$

- Suponemos que es cierta para n = p, es decir:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + p^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4}$$

- Hemos de ver que también es cierta para n = p+1, es decir hemos de probar que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + p^3 + (p+1)^3 = \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4}$$

Para ello utilizando lo anterior obtenemos:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + p^3 + (p+1)^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4} + (p+1)^3 = (p+1)^2\left(\frac{p^2}{4} + p + 1\right) = \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4}$$

Esto es lo que queríamos demostrar.

Con esto hemos demostrado que la igualdad es cierta para p + 1. Por tanto podemos afirmar que es cierta $\forall\, n \in N$

# PÁGINA 358

## ACTIVIDADES FINALES

### EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de integrales inmediatas:

a) $\int (2x^2 - 4x + 5)\, dx$

b) $\int \left[\frac{x^4 - 3x\sqrt{x} + 2}{x}\right] dx$

c) $\int \frac{3x}{x^2 + 5} dx$

d) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2 + 1}} dx$

e) $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$

f) $\int \frac{dx}{4 + 7x^2}$

g) $\int \frac{3}{\sqrt{4 - x^2}} dx$

h) $\int \left(3x + \frac{1}{x^2}\right) dx$

i) $\int \frac{(1+x)^2}{x} dx$

j) $\int \frac{4x + 8}{x^2 + 4x} dx$

k) $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}} dx$

l) $\int 3x \cdot 3^{x^2}\, dx$

m) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^8}} dx$

n) $\int \operatorname{sen}^3 2x \cos 2x\, dx$

ñ) $\int \left(2\sqrt[4]{x^3} - \frac{5}{x}\right) dx$

o) $\int (2x^2 + 3)^2 \cdot 5x\, dx$

p) $\int 4x^2\sqrt{1 - x^3}\, dx$

q) $\int \frac{1 - \cos 2x}{2x - \operatorname{sen} 2x} dx$

r) $\int \frac{e^{\ln x}}{x} dx$

s) $\int \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} dx$

t) $\int \frac{1 - \ln x}{x \ln x} dx$

2. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración por partes:

a) $\int x^2 \cdot \cos x\, dx$

b) $\int e^x \cdot \cos 2x\, dx$

c) $\int \operatorname{arcsen} x\, dx$

d) $\int x \operatorname{sen} x \cdot \cos x\, dx$

e) $\int x^3 \cdot \ln x\, dx$

f) $\int 2^x \cdot \operatorname{sen} x\, dx$

g) $\int \operatorname{arctg} x\, dx$

h) $\int x^3 \ln^2 x\, dx$

i) $\int x^2 \cdot e^x\, dx$

j) $\int \ln x\, dx$

k) $\int \sqrt{x} \cdot \ln x\, dx$

l) $\int \frac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

3. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de funciones racionales:

a) $\int \frac{x}{x - 2} dx$

b) $\int \frac{x^2 + x}{(1 - x)(1 + x^2)} dx$

c) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1}$

d) $\int \frac{9x}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} dx$

e) $\int \frac{dx}{x^3 - 3x^2 + 2x}$

f) $\int \frac{-x^2 + 6x - 1}{(x - 1)^2(x + 1)} dx$

g) $\int \frac{x^3 + 4x}{x^2 + 1} dx$

h) $\int \frac{x}{(x - 1)^2} dx$

i) $\int \frac{x^3}{x^2 - 1} dx$

j) $\int \frac{3x^2 + 5x - 7}{x^3 - 2x^2 + x - 2} dx$

k) $\int \frac{x^4 + 2x - 6}{x^2 + x - 2} dx$

l) $\int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$

SOLUCIONES

1. Las integrales quedan:

a) $\int (2x^2-4x+5)\,dx = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 5x + C$

b) $\int \frac{x^4\,3x\,\sqrt{x+2}}{x}\,dx = \int\left(x^3 - 3x^{1/2} + \frac{2}{x}\right)dx = x^4/4 - 2\sqrt{x^3}\;2\ln|x| + C$

c) $\int \frac{3x}{x^2+5}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+5\right| + C$

d) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}\,dx = \frac{1}{3}\int (3x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 6x\cdot dx =$

$= \frac{2}{3}\sqrt{3x^2+1} + C$

e) $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot dx = 2\ \mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

f) $\int \frac{dx}{4+7x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{2}\right)^2}\,dx =$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\int \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{1+\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{2}\right)^2}\,dx =$

$= \frac{1}{2\sqrt{7}}\cdot \mathit{arc\ tg}\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{2}\right) + C$

g) $\int \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 3\int \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,dx =$

$= 3\cdot \mathit{arc\ sen}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

h) $\int\left(3x+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int\left(3x+x^{-2}\right)dx=\frac{3x^2}{2}-1/x+C$

i) $\int \frac{(1+x)^2}{x}\,dx=\int\left(x+2+\frac{1}{x}\right)dx=$

$=\frac{x^2}{2}+2x+ln\,|x|+C$

j) $\int\frac{4x+8}{x^2+4x}dx=2\int\frac{2x+4}{x^2+4x}dx=2\ln\left|x^2+4x\right|+C$

k) $\int\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}dx=2\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)^2dx=\frac{2}{3}\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)^3+C$

l) $\int 3x\cdot 3^{x^x}\,dx=\frac{3}{2}\int 3^{x^2}\cdot 2x=\frac{3}{2}\cdot\frac{3^{x^2}}{\ln 3}+C$

m) $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx=\frac{1}{4}\int\frac{4x^3}{1-(x^4)^2}dx=\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}(x^4)+C$

n) $\int \operatorname{sen}^3 2x\cdot\cos 2x\cdot d=\frac{1}{2}\int (sen\,2x)^3\cdot 2\cdot cos\,2x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{(sen\,2x)^4}{4}+C$

ñ) $\int\left(2\sqrt[4]{x^3}-\frac{5}{x}\right)dx=\int\left(2x^{\frac{3}{4}}-\frac{5}{x}\right)dx=\frac{8\sqrt[4]{x^7}}{7}-5\,ln\,|x|+C$

o) $\int(2x^2+3)^2\cdot 5x\,dx=\frac{5}{4}\int(2x^2+3)^2\cdot 4x\,dx=\frac{5}{4}\,\frac{(2x^2+3)^3}{3}+C$

p) $\int 4x^2\cdot\sqrt{1-x^3}\,dx=\frac{4}{-3}\int(1-x^3)^{\frac{1}{2}}\cdot(-3x^2)\,dx=$

$-\frac{4}{3}\,\frac{2\sqrt{(1-x^3)^3}}{3}=\frac{-8}{9}\sqrt{(1-x^3)^3}+C$

q) $\int \frac{1 - \cos 2x}{2x - \operatorname{sen} 2x}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2 - 2\cos 2x}{2x - \operatorname{sen} 2x}\, dx = \frac{1}{2} \ln |2x - \operatorname{sen} 2x| + C$

r) $\int \frac{e^{\ln x}}{x} \cdot dx = e^{\ln x} + C$

s) $\int \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx = \frac{1}{-2} \int (4 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2x)\, dx =$

$-\frac{1}{2} \frac{(4 - x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{4 - x^2} + C$

t) $\int \frac{1 - \ln x}{x \ln x}\, dx = \int \frac{1/x}{\ln x}\, dx - \int \frac{1}{x}\, dx =$

$= \ln |\ln x| - \ln x + C$

2. Las integrales quedan:

a) $\int x^2 \cdot \cos x\, dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = x^2 \Rightarrow du = 2x \cdot dx \\ dv = \cos x \cdot dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{array}\right\}$$

$$I = \int x^2 \cdot \cos x \cdot dx = x^2 \cdot \operatorname{sen} x - \int 2x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx$$

Aplicamos de nuevo el método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{r} u = 2x \Rightarrow du = 2 \cdot dx \\ dv = \operatorname{sen} x \cdot dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array}\right\}$$

$$I = x^2 \operatorname{sen} x - \left[-2x \cos x - \int 2 \cdot (-\cos x) \cdot dx\right] =$$

$$= x^2 \cdot \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C$$

Por tanto:

$$\int x^2 \cdot \cos x\, dx = x^2 \cdot \operatorname{sen} x + 2x \cdot \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C$$

b) $\int e^x \cdot \cos 2x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = \cos 2x \Rightarrow du = -2 \operatorname{sen} 2x\, dx \\ dv = e^x \cdot dx \Rightarrow v = e^x \end{array}\right\}$$

$$I = \int e^x \cdot \cos 2x \cdot dx = e^x \cdot \cos 2x - \int -2\, e^x \operatorname{sen} 2x\, dx =$$

$$= e^x \cos 2x + 2 \int e^x \cdot \operatorname{sen} 2x \cdot dx$$

Aplicamos de nuevo el método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{r} u = \operatorname{sen} 2x \Rightarrow du = 2 \cdot \cos 2x \cdot dx \\ dv = e^x \cdot dx \Rightarrow v = e^x \end{array}\right\}$$

$$I = \int e^x \cdot \cos 2x + 2\ \left[e^x \operatorname{sen} 2x - \int 2\, e^x \cos 2x\, dx\right] =$$

$$= e^x \cos 2x + 2\, e^x \operatorname{sen} 2x - 4 \int e^x \cdot \cos 2x\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = e^x \cdot \cos 2x + 2\, e^x \cdot \operatorname{sen} 2x - 4\, I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^x \cos 2x + 2\, e^x \operatorname{sen} 2x}{5} + C$$

$$\left.\begin{array}{r} u = \operatorname{arc\,sen} x \Rightarrow du = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \\ \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = \int \operatorname{arc\,sen} x \cdot dx = x \cdot \operatorname{arc\,sen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx =$$

c) $\int$ arc sen $x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = arc\ sen\ x \Rightarrow du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = \int arc\ sen\ x \cdot dx = x \cdot arc\ sen\ x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx =$$

$$= x \cdot arc\ sen\ x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\ (-2x)\ dx\ =$$

$$= x \cdot arc\ sen\ x + \sqrt{1-x^2} + C$$

d) $\int x \cdot sen\ x \cdot cos\ x \cdot dx = I = \int \frac{x}{2} \cdot sen\ 2x \cdot dx$

$$\left.\begin{array}{r} u = \dfrac{x}{2} \Rightarrow du = \dfrac{1}{2}\ dx \\ dv = sen\ 2x \cdot dx \Rightarrow v = \dfrac{-cos\ 2x}{2} \end{array}\right\}$$

e) $\int x^3 \cdot \ln x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = ln\ x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}\ dx \\ dv = x^3\ dx \Rightarrow v = \dfrac{x^4}{4} \end{array}\right\}$$

$$I = \int x^3 \cdot ln\ x \cdot dx = \frac{x^4}{4}\ ln\ x - \int \frac{x^4}{4x}\ dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\ ln\ x - \frac{x^4}{16} + C$$

f) $\int 2^x \cdot$ sen $x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = 2^x \Rightarrow du = 2^x \cdot ln\ 2 \cdot dx \\ dv = sen\ x \cdot dx \Rightarrow v = -cos\ x \end{array}\right\}$$

$$I = \int 2^x \cdot sen\ x \cdot dx = -2^x \cdot cos\ x + \int 2^x \cdot ln\ 2 \cdot cos\ x \cdot dx$$

Aplicando de nuevo este método, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} u = 2^x \Rightarrow du = 2^x \cdot \ln 2 \cdot dx \\ dv = \cos x \cdot dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{array}\right\}$$

$$I = \int -2^x \cdot \cos x +$$

$$+ \ln 2 \left[ 2^x \cdot \operatorname{sen} x - \int 2^x \cdot \ln 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \mathrm{dx} \right] = -2^x \cdot \cos x +$$

$$+ 2^x \cdot \ln 2 \cdot \operatorname{sen} x - (\ln 2)^2 \int 2^x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = -2^x \cdot \cos x + 2^x \cdot \ln 2 \cdot \operatorname{sen} x - (\ln 2)^2 \cdot I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{-2^x \cdot \cos x + 2^x \cdot \ln 2 \cdot \operatorname{sen} x}{1 + (\ln 2)^2} + C$$

g) $\int$ arc tg $x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = \operatorname{arc\,tg} x \Rightarrow du = \dfrac{1}{1 - x^2}\, dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = \int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1 + x^2}\, dx =$$

$$= x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1 + x^2}\, dx =$$

$$= x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + C$$

h) $\int x^3 \cdot \ln^2 x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = \ln^2 x \Rightarrow du = 2 \ln x \cdot \dfrac{1}{x} \cdot dx \\ dv = x^3\, dx \Rightarrow v = \dfrac{x^4}{4} \end{array}\right\}$$

$$I = \int x^3 \cdot \ln^2 x \cdot dx = \frac{x^4}{4} \ln^2 x - \int \frac{x^4}{4} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} \ln^2 x - \frac{1}{2} \int x^3 \cdot \ln x \cdot dx$$

Aplicando este método a la última integral, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = x^3\,dx \Rightarrow v = \dfrac{x^4}{4} \end{array}\right\}$$

$$I = \frac{x^4}{4}\ln^2 x - \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx\right] =$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln^2 x - \frac{x^4}{8}\ln x + \frac{x^4}{32} + C$$

i) $\int x^2 \cdot e^x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = x^2 \Rightarrow du = 2x\cdot dx \\ dv = \cos x \cdot dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{array}\right\}$$

$$I = \int x^2 \cdot e^x \cdot dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x \cdot dx \Rightarrow$$

Aplicamos de nuevo el método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = 2x \Rightarrow du = 2\,dx \\ dv = e^x\,dx \Rightarrow v = e^x \end{array}\right\}$$

$$I = \int x^2 \cdot e^x \cdot dx = x^2\,e^x - \left[2x\,e^x - \int 2\,e^x\,dx\right] =$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2xe^x + 2e^x + C \Rightarrow$$

$$\int x^2 \cdot e^x \cdot dx = x^2 \cdot e^x - 2x\,e^x + 2\,e^x + C$$

j) $\int \ln x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right|$$

$$I = \int \ln x \cdot dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\cdot dx = x\cdot \ln x - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \ln x \cdot dx = x\ln x - x + C$$

k) $\int \sqrt{x} \cdot \ln x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{aligned} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = \sqrt{x} \cdot dx \Rightarrow v = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int \sqrt{x} \cdot \ln x\, dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x - \int \frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \ln x - \frac{4}{9} \sqrt{x^3} + C$$

l) $\int \frac{x \cdot \text{arc sen } x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = I$

$$\left.\begin{aligned} u = \text{arc sen } x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\ dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \Rightarrow v = -\sqrt{1-x^2} \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int \frac{x \cdot \text{arc sen } x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\sqrt{1-x^2} \cdot \text{arc sen } x -$$

$$- \int \frac{-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\sqrt{1-x^2} \cdot \text{arc sen } x + x + C$$

3. Las integrales quedan:

a) $$\int \frac{x}{x-2}\,dx = \int \frac{x-2}{x-2}\,dx + \int \frac{2}{x-2}\,dx =$$

$$= x + 2\ ln\ |x-2| + C$$

b) $$\int \frac{x^2+x}{(1-x)(1+x^2)}\,dx$$

Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples:

$$\frac{x^2+x}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$\frac{x^2+x}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{A(1+x^2)+(Bx+C)(1-x)}{(1-x)(1+x^2)}$$

- $x = 1 \Rightarrow 2A = 2 \Rightarrow A = 1$
- $x = 0 \Rightarrow A + C = 0 \Rightarrow C = -1$
- $x = -1 \Rightarrow 2A - 2B + 2C = 0 \Rightarrow B = 0$

La integral pedida vale:

$$\int \frac{x^2+x}{(1-x)(1+x^2)}\,dx = \int \frac{1}{1-x}\,dx + \int \frac{-1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= -ln\ |1-x| - arc\ tg\, x + C$$

c) $$\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{x+1} + C$$

d) $$\int \frac{9x}{x^3+5x^2+8x+4}\,dx = -9\int \frac{1}{x+1}\,dx +$$

$$+ 9\int \frac{1}{x+2}\,dx + 18\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx =$$

$$= -9\ ln\ |x+1| + 9\ ln\ |x+2| - \frac{18}{x+2} + C$$

e) $\int \frac{dx}{x^3 - 3x^2 + 2x}$

Descomponemos la fracción integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)} =$$

$$= \frac{A(x-1)(x-2) + B \cdot x \cdot (x-2) + C \cdot x(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

- $x = 1 \Rightarrow -B = 1 \Rightarrow B = -1$
- $x = 0 \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$
- $x = 2 \Rightarrow 2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

La integral pedida vale:

$$\int \frac{dx}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{1}{x-1}\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-2}\, dx = \frac{1}{2}\, ln\, |x| - ln\, |x-1| +$$

$$+ \frac{1}{2}\, ln\, |x-2| + C = ln \left| \frac{\sqrt{x(x-2)}}{x-1} \right| + C$$

f) $\int \frac{-x^2+6x-1}{(x-1)^2\cdot(x+1)}dx$

Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples:

$$\frac{-x^2+6x-1}{(x-1)^2\cdot(x+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{x+1}$$

$$\frac{-x^2+6x-1}{(x-1)^2\cdot(x+1)} =$$

$$= \frac{A(x+1)+B(x-1)(x+1)+C(x-1)^2}{(x-1)^2\cdot(x+1)}$$

- $x = 1 \Rightarrow 2A = 4 \Rightarrow A = 2$
- $x = -1 \Rightarrow 4C = -8 \Rightarrow C = -2$
- $x = 0 \Rightarrow A - B + C = -1 \Rightarrow B = 1$

La integral pedida vale:

$$\int \frac{-x^2+6x-1}{(x-1)^2\cdot(x+1)}\,dx = \int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx +$$

$$+\int \frac{-2}{x+1}\,dx = -\frac{2}{x-1} + ln\,|x-1| - 2\,ln\,|x+1| + C =$$

$$= \frac{-2}{x-1} + ln\left|\frac{x-1}{(x+1)^2}\right| + C$$

g) $\int \frac{x^3+4x}{x^2+1}\,dx = \int x dx + \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2} +$

$$\frac{3}{2}\,ln\,(x^2+1) + C$$

h) $\int \frac{x}{(x-1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x-1)^2}dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+2}{(x-1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x-1)}{(x-1)^2}\,dx +$$

$$+\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = ln\,|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

i) $\int \frac{x^3}{x^2-1}dx = \int \frac{x(x^2-1)+x}{x^2-1} =$

$= \int x\,dx + \int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\,ln\,|x^2-1| + C$

j) $\int \frac{3x^2+5x-7}{x^3-2\cdot x^2+x-2}dx$

Descomponemos la fracción dada en suma de fracciones simples:

$$\frac{3x^2+5x-7}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{3x^2+5x-7}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)}$$

- $x = 2 \Rightarrow 5A = 15 \Rightarrow A = 3$
- $x = 0 \Rightarrow A - 2C = -7 \Rightarrow C = 5$
- $x = 1 \Rightarrow 2A - B - C = 1 \Rightarrow B = 0$

La integral pedida vale:

$$\int \frac{3x^2+5x-7}{(x-2)(x^2+1)}\,dx = \int \frac{3}{x-2}\,dx + \int \frac{5}{x^2+1}\,dx =$$

$= 3\,ln\,|x-2| + 5\cdot arc\,tg\,x + C$

k) $\int \frac{x^4+2x-6}{x^2+x-2}dx = \int \left[x^2-x+3-\frac{3x}{x^2+x-2}\right]dx =$

$= \int x^2\,dx - \int xdx + 3\int dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx -$

$-2\int \frac{1}{x+2}\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} +$

$+3x - ln\,|x-1| - 2\,ln\,|x+2| + C$

l) $\int \frac{x^3}{1+x^2}dx = \int \left[x - \frac{x}{x^2+1}\right]dx =$

$= \int xdx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\,ln\,(x^2+1) + C$

## PÁGINA 359

■ 4. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de cambio de variable con el cambio que se indica en cada caso:

a) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+2}dx \quad [e^x = t]$

b) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx \quad [\sqrt{x} = t]$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx \quad [4-x^2 = t^2]$

d) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx \quad [\sqrt{x-1} = t]$

e) $\int \cos^{-4} x \, dx \quad [\operatorname{tg} x = t]$

f) $\int \frac{3^x+27^x}{1+9^x}dx \quad [3^x = t]$

■ 5. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de cambio de variable:

a) $\int x\sqrt{x-1}dx$

b) $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}dx$

c) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$

d) $\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$

e) $\int \frac{dx}{(x+5)\sqrt{x+1}}$

f) $\int \frac{\operatorname{sen} 3x}{\sqrt[3]{1+3\cos 3x}}dx$

g) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$

h) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$

i) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$

■ 6. Resuelve las siguientes integrales por el método de integración más conveniente:

a) $\int \frac{3}{1+\sqrt{x+1}}dx$

b) $\int \operatorname{sen}^3 x \, dx$

c) $\int \frac{[\ln x]^5}{x}dx$

d) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

e) $\int \operatorname{sen}(\ln x) \cdot dx$

f) $\int \frac{6x^3-x}{1+x^4}dx$

g) $\int x \cdot \ln\left[\frac{1-x}{1+x}\right]dx$

h) $\int \operatorname{sen}^4 5x \cdot \cos 5x \, dx$

i) $\int x^2 \cdot \operatorname{arcsen} x \, dx$

j) $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

k) $\int \frac{dx}{x[\ln x - 1]}$

l) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$

m) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx$

n) $\int x \ln(x^2-1) \, dx$

ñ) $\int \frac{4x^2}{x^4-1}dx$

o) $\int \frac{\cos 5x}{\operatorname{sen}^4 5x}dx$

p) $\int \frac{1}{\sqrt{1+4x-x^2}}dx$

q) $\int \frac{3x}{x^4+16}dx$

r) $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{2x}dx$

s) $\int \frac{x^4-8}{x^3-4x}dx$

t) $\int \ln\left[x+\sqrt{1+x^2}\right]dx$

u) $\int \frac{6x^3-7x}{\sqrt{1-x^4}}dx$

v) $\int \frac{2+x^2-3x}{(1+x^2)}dx$

w) $\int \sqrt{6-5x^2}\,dx$

■ 7. Halla la primitiva de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ cuya gráfica pase por el punto (2, 2).

SOLUCIONES

4. Las integrales son:

a) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+2}\,dx = \int \frac{1}{t^2+t+2}\,dt =$

$= \int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} = \frac{7}{4}\int \frac{1}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{7}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]^2}\,dt =$

$= \frac{7\sqrt{7}}{8}\int \frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\,t+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2}\,\frac{2}{\sqrt{7}}\,dt =$

$= \frac{7\sqrt{7}}{8}\,arc\ tg\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\,e^x+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)+C$

b) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{t^2+t}\,2t\,dt = 2\int \frac{1}{t+1}\,dt =$

$= 2\ ln\ |t+1] + C = 2\ ln\ |\sqrt{x}+1| + C$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\int dt\ = -t + C = -\sqrt{4-x^2}+C$

d) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx = 2\int (t^2+1)^3\,dt =$

$= 2\int [t^6+3t^4+3t^2+1]\,dt = \frac{2t^7}{7}+\frac{6t^5}{5}+2t^3+2t+C =$

$= \frac{2}{7}(\sqrt{x-1})^7+\frac{6}{5}(\sqrt{x-1})^5+2(\sqrt{x-1})^3+$

$+2\sqrt{x-1}+C$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^4 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx =$

$\displaystyle= \int (1 + tg^2 x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \int (1 + t^2)\, dt =$

$\displaystyle= t + \frac{t^3}{3} + C = tgx + \frac{tg^3 x}{3} + C$

f) $\displaystyle\int \frac{3^x + 27^x}{1 + 9^x}\, dx = \int \frac{3^x(1 + 9^x)}{1 + 9^x}\, dx = \int 3^x\, dx =$

$\displaystyle= \frac{1}{\ln 3} \int dt = \frac{1}{\ln 3}\, t + C = \frac{1}{\ln 3}\, 3^x + C$

5. Las integrales son:

a) $\int x\sqrt{x-1}\, dx$ Hacemos el cambio de variables:

$x - 1 = t^2 \Rightarrow dx = 2t\, dt$

$\displaystyle\int x \cdot \sqrt{x-1}\, dx = \int (t^2 + 1) \cdot t \cdot 2t\, dt =$

$\displaystyle\int (2t^4 + 2t^2)\, dt = \frac{2t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + C$

Deshaciendo el cambio $t = \sqrt{x-1}$, obtenemos:

$\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\, dx = 2\,\frac{\sqrt{(x-1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(x-1)^3}}{3} + C$

b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}\, dx$

Hacemos el cambio de variable: $2x - 3 = t^2 \Rightarrow dx = t\, dt$.

$\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}\, dx = \int \frac{t}{t+1} \cdot t\, dt = \int \frac{t^2}{t+1}\, dt =$

$\displaystyle= \int \frac{(t+1)(t-1)+1}{t}\, dt = \int (t-1)\, dt +$

$\displaystyle+ \int \frac{1}{t+1}\, dt = \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| + C$

Deshaciendo el cambio: $t = \sqrt{2x-3}$, obtenemos:

$$\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}\,dx = \frac{2x-3}{2} - \sqrt{2x-3} +$$

$$+ \ln|\sqrt{2x-3}+1| + C$$

c) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x} = \int (\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{(\ln x)^{-1}}{-1} = -1/\ln x + C$

d) $\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = -\ln\left|1+e^{-x}\right| + C$

También se puede hacer mediante el cambio de variable: $1+e^{-x}=t$.

e) $\int \frac{dx}{(x+5)\sqrt{x+1}}$ hacemos el cambio: $x+1=t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{dx}{(x+5)\sqrt{x+1}} = \int \frac{2t\,dt}{(t^2+4)\cdot t} = \int \frac{2}{t^2+4}\,dt =$$

$$\int \frac{1/2}{1+t^2/4}\,dt = \int \frac{1/2}{1+(t/2)^2}\,dt = arc\ tg\left(\frac{t}{2}\right) + C =$$

$= arc\ tg\,\frac{\sqrt{x+1}}{2} + C$ tras deshacer el cambio con

$t = \sqrt{x+1}$.

f) $$\int \frac{sen\,3x}{\sqrt[3]{1+3\cos 3x}}\,dx = \int (1+3\cos 3x)^{-\frac{1}{3}} \cdot$$

$$\cdot\, sen\,3x \cdot dx = \frac{1}{-9}\int (1+3\cos 3x)^{-\frac{1}{3}} \cdot$$

$$\cdot\,(-9\,sen\,3x)\,dx = -\frac{1}{9}\,\frac{(1+3\cos 3x)^{2/3}}{2/3} =$$

$$= \frac{-\sqrt[3]{(1+3\cos 3x)^2}}{6} + C$$

También se puede hacer mediante el cambio de variable: $1+3\cos 2x = t^3$.

g) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,dx = -\int (1+\ln x)^{1/3} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$

$= \frac{(1+\ln x)^{4/3}}{4/3} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\ln x)^4} + C$

También se puede hacer con el cambio de variable: $1 + \ln x = t$.

h) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,dx$

Hacemos el cambio: $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,dx = \int \frac{t}{t^2+2} \cdot 2t \cdot dt = \int \frac{2t^2}{t^2+2}\,dt =$$

$$= 2\int \frac{(t^2+2)-2}{t^2+2}\,dt = 2\int \frac{t^2+2}{t^2+2}\,dt -$$

$$-4\int \frac{1}{t^2+2}\,dt = 2t - 2\int \frac{1}{1+\frac{t^2}{2}}\,dt =$$

$$= 2t - 2\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dt = 2t - 2\cdot\sqrt{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dt =$$

$$= 2t - 2\sqrt{2}\cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{2}\cdot \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x}{2}} + C$$

al deshacer el cambio con $t = \sqrt{x}$.

i) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx =$

Hacemos el cambio $x^2 + 1 = t^2 \Rightarrow dx = \frac{t\,dt}{x}$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \int \frac{t}{x} \cdot \frac{t\,dt}{x} = \int \frac{t^2}{x^2}\,dt = \int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt =$$

$$= \int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,dt = \int \frac{t^2-1}{t^2-1}\,dt + \int \frac{1}{t^2-1}\,dt =$$

$$= t + \int \frac{1/2}{t-1}\,dt + \int \frac{-1/2}{t+1}\,dt = t + \frac{1}{2}\ln|t-1| -$$

$$-\frac{1}{2}\ln|t+1| + C = t + \ln\left|\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\right| + C = \sqrt{x^2+1} +$$

$$+ \ln\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}} + C$$

6. Las integrales quedan:

a) $\int \frac{3}{1+\sqrt{x+1}}\,dx$

La resolveremos por el método de cambio de variable haciendo: $x+1=t^2 \Rightarrow dx=2t\,dt$

$$3\int \frac{1}{1+t}\cdot 2t\,dt = 3\int \frac{2(t+1)-2}{t+1}\,dt =$$

$$= 3\int 2\,dt - 3\int \frac{2}{t+1}\,dt = 6t - 6\,ln\,|t+1| =$$

$$= 6\sqrt{x+1} - 6\,ln\,|\sqrt{x+1}+1| + C$$

b) $\int sen^3 x\cdot dx = \int sen\,x\cdot sen\,x^2\cdot dx =$

$$= \int sen\,x\,(1-cos^2 x)\,dx = \int sen\,x\,dx -$$

$$-\int (cos\,x)^2\cdot sen\,x\cdot dx = -cos\,x + \int (cos\,x)^2\,(-sen\,x)\,dx =$$

$$= -cos\,x + \frac{(cos\,x)^3}{3} + C$$

c) $\int \frac{(\ln x)^5}{x}\,dx = \int (\ln x)^5\cdot\frac{1}{x}\cdot dx = \frac{(\ln x)^6}{6} + C$

d) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$ hacemos esta integral por el método de cambio de variable, haciendo:

$$x^2 + 2x = t \Rightarrow dx = \frac{t\,dt}{x+1}$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} = \int \frac{1}{(x+1)\cdot t}\cdot\frac{t\,dt}{x+1} =$$

$$= \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dt = \int \frac{1}{x^2+2x+1}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = arc\,tg\,t = arc\,tg\,\sqrt{x^2+2x} + C$$

e) $\int sen(\ln x)\, dx = I$

Esta integral la resolvemos por el método de integración por partes.
Esta integral la resolvemos por el método de integración por partes.

$$\left.\begin{array}{r} u = sen\ (ln\ x) \Rightarrow du = cos\ (ln\ x) \cdot \dfrac{1}{x} \cdot dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = \int sen\ (ln\ x)\ dx = x \cdot sen\ (ln\ x) -$$

$$- \int x \cdot cos\ (ln\ x) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x \cdot sen\ (ln\ x) - \int cos\ (ln\ x)\ dx$$

Volvemos a aplicar este método a la última integral:

$$\left.\begin{array}{r} u = cos\ (ln\ x) \Rightarrow du = -sen\ (ln\ x) \cdot \dfrac{1}{x} \cdot dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = x \cdot sen\ (ln\ x) - \left[ x \cdot cos\ (ln\ x) - \int -x\ sen\ (ln\ x) \cdot \frac{1}{x}\ dx \right] =$$

$$= x \cdot sen\ (ln\ x) - x\ cos\ (ln\ x) - \int sen\ (ln\ x)\ dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = x\ sen\ (ln\ x) - x\ cos\ (ln\ x) - I \Rightarrow 2I = x\ sen\ (ln\ x) -$$

$$- x\ cos\ (ln\ x) \Rightarrow I = \frac{x\ sen\ (ln\ x) - x\ cos\ (ln\ x)}{2} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int sen\ (ln\ x)\ dx = \frac{x\ sen\ (ln\ x) - x\ cos\ (ln\ x)}{2} + C$$

f) $\displaystyle \int \frac{6x^3 - x}{1 + x^4}\ dx = \int \frac{6x^3}{1 + x^4}\ dx - \int \frac{x}{1 + x^4}\ dx =$

$$= \frac{6}{4} \int \frac{4x^3}{1 + x^4}\ dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1 + (x^2)^2}\ dx =$$

$$= \frac{3}{2}\ ln\ |1 + x^4| - \frac{1}{2}\ arc\ tg\ (x^2) + C$$

g) $\int x \cdot \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx = I$

Hacemos esta integral por medio del método de integración por partes:

$$\left.\begin{aligned} u = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) &\Rightarrow du = \frac{-2}{1-x^2}\,dx \\ dv = x \cdot dx &\Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int x \cdot \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) -$$

$$-\int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{-2}{1-x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) -$$

$$-\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \int \frac{x^2-1+1}{x^2-1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \int \frac{x^2-1}{x^2-1}\,dx - \int \frac{1}{x^2-1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - x - \int \frac{1}{x^2-1}\,dx =$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - x - \int \frac{1/2}{x-1}\,dx - \int \frac{-1/2}{x+1}\,dx +$$

$$+\frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - x - \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$$

(*) en esta integral hemos aplicado el método de integración de funciones racionales, descomponiendo la fracción $\frac{1}{x^2-1}$ en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1}$$

h) $\int sen^4 5x \cdot \cos 5x \cdot dx = \frac{1}{5} \int (sen\, 5x)^{-4} \cdot 5 \cdot \cos 5x \cdot dx =$

$$= \frac{1}{5} \frac{(sen\ 5x)^{-3}}{-3} = \frac{-1}{15\ (sen\ 5x)^3} + C$$

i) $\int x^2 \cdot arc\, sen\, x \cdot dx = I$

La resolvemos por el método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{r} u = arc\ sen\ x \Rightarrow du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx \\ dv = x^2\ dx \Rightarrow v = \dfrac{x^3}{3} \end{array}\right\}$$

$$I = \int x^2 \cdot arc\ sen\ x \cdot dx = \frac{x^3}{3}\ arc\ sen\ x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

Esta última integral la resolvemos por cambio de variables, haciendo $1 - x^2 = t^2 \Rightarrow dx = \dfrac{-t\ dt}{x}$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \int \frac{x^3}{t} \cdot \frac{-t\ dt}{x} \int -x^2 \cdot dt =$$

$$= \int (t^2 - 1)\ dt = \frac{t^3}{3} - t = \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} - \sqrt{1-x^2}$$

Por tanto, la integral pedida vale:

$$\int x^2 \cdot arc\ sen \cdot dx = \frac{x^3}{x} \cdot arc\ sen\ x -$$

$$- \frac{1}{3} \left[ \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} - \sqrt{1-x^2} \right] = \frac{x^3}{3}\ arc\ sen\ x -$$

$$- \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{9} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{3} + C$$

j) $\displaystyle\int \frac{arc\ sen\ x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \int (arc\ sen\ x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \frac{(arc\ sen\ x)^2}{2} + C$

k) $\int \frac{dx}{x(\ln x-1)}=\int\frac{1/x\cdot dx}{\ln x-1}=\ln|\ln x-1|+C$

l) $\int\frac{\ln(\ln x)}{x}dx=I$

$$I=\int \frac{\ln t}{x}\cdot x\,dt=\int \ln t\cdot dt$$

Hacemos esta integral por el método de cambio de variable, haciendo: $\ln x=t\Rightarrow dx=x\cdot dt$

$$\left.\begin{array}{r} u=\ln t\Rightarrow du=\frac{1}{t}\,dt \\ dv=dt\Rightarrow v=t \end{array}\right\}$$

$$\int \ln t\cdot dt=t\cdot \ln t-\int t\cdot \frac{1}{t}\cdot dt=t\cdot \ln t-t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\cdot dx=\ln x\cdot[\ln(\ln x)]-\ln x+C$$

m) $\int\frac{sen\,x}{\cos^2 x}dx=-\int\frac{1}{t^2}dt=\frac{1}{t}+C=\frac{1}{\cos x}+C$

Hemos realizado el cambio de variable $\cos x=t$

n) $\int x\cdot\ln(x^2-1)\cdot dx=I$

Esta integral la resolvemos por el método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{r} u=\ln(x^2-1)\Rightarrow du=\frac{2x}{x^2-1}\,dx \\ dv=x\,dx\Rightarrow v=\frac{x^2}{2} \end{array}\right\}$$

$$I=\int x\cdot\ln(x^2-1)\cdot dx=\frac{x^2}{2}\ln(x^2-1)-\int\frac{x^3}{x^2-1}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(x^2-1)-\int\frac{(x^2-1)x+x}{x^2-1}dt=\frac{x^2}{2}\ln(x^2-1)-$$

$$-\int x\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2-1}dx=\frac{x^2}{2}\ln(x^2-1)-\frac{x^2}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C$$

ñ) $\int \frac{4x^2}{x^4-1}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx +$

$+ 2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \ln|x-1| - \ln|x+1| + 2\,\text{arc tg}\, x + C.$

o) $\int \frac{\cos 5x}{\text{sen}^4 5x}\,dx = \frac{1}{5}\int (\text{sen}\, 5x)^{-4} \cdot 5 \cdot \cos 5x \cdot dx = \frac{1}{5}\,\frac{(\text{sen}\, 5x)^{-3}}{-3} = \frac{-1}{15\,(\text{sen}\, 5x)^3} + C$

p) $\int \frac{1}{\sqrt{1+4x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{5-(2-x)^2}}\,dx =$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(2-x)^2}{5}}}\,dx =$

$= -\int \frac{\frac{-1}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1-\left(\frac{2-x}{\sqrt{5}}\right)^2}}\,dx = -\text{arc sen}\left(\frac{2-x}{\sqrt{5}}\right) + C$

q)

$\int \frac{3x}{x^4+16}\,dx = \int \frac{\frac{3x}{16}}{1+\frac{x^4}{16}}\,dx = \int \frac{\frac{3x}{16}}{1+\left(\frac{x^2}{4}\right)^2}\,dx =$

$= \frac{3}{8}\int \frac{\frac{x}{2}}{1+\left(\frac{x^2}{4}\right)^2}\,dx = \frac{3}{8} \cdot \text{arc tg}\left(\frac{x^2}{4}\right) + C$

r) $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{2x}\,dx = \int \frac{\sqrt{x}}{2x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{\ln x}{x}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int x^{-1/2}\,dx + \frac{1}{2}\int \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{1/2}}{1/2} +$

$+ \frac{1}{2}\,\frac{(\ln x)^2}{2} + C = \sqrt{x} + \frac{(\ln x)^2}{4} + C$

s) $\int \frac{x^4 - 8}{x^3 - 4x}\, dx = \int \left[ x + \frac{4x^2 - 8}{x^3 - 4x} \right] dx =$

$= \int x dx + 2 \int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{1}{x - 2}\, dx + \int \frac{1}{x + 2}\, dx =$

$= \frac{x^2}{2} + 2\, ln\, |x| + ln\, |x - 2| + ln\, |x + 2| + C$

t) $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2})\, dx = 1$

Hacemos esta integral por el método de integración por partes:

$$\left. \begin{array}{r} u = ln\,(x + \sqrt{1 + x^2}) \Rightarrow du = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right\}$$

$I = \int ln\,(x + \sqrt{1 + x^2}) \cdot dx = x \cdot ln\,(x + \sqrt{1 + x^2}) -$

$- \int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx = x \cdot ln\,(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} + C$

u) $\int \frac{6x^3 - 7x}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx = \int \frac{6x^3}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx - \int \frac{7x}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx =$

$= \frac{6}{-4} \int (1 - x^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4x^3)\, dx - \frac{7}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2)^2}}\, dx =$

$= -\frac{3}{2}\, \frac{(1 - x^4)^{1/2}}{1/2} - \frac{7}{2}\, arc\ sen\ (x^2) =$

$= -3\sqrt{1 - x^4} - \frac{7}{2} \cdot arc\ sen\ (x^2) + C$

v) $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}\, dx = \int \left[ 1 + \frac{-3x + 1}{x^2 + 1} \right] dx =$

$= \int dx - \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx + \int \frac{1}{x^2 + 1}\, dx =$

$= x - \frac{3}{2}\, ln\,(x^2 + 1) + arc\ tg\, x + C$

w) $\int \sqrt{6-5x^2}\ dx$

Esta integral la resolvemos por el método de integración por cambio de variable, haciendo:

$$x = \frac{\sqrt{6} \cdot sen\ t}{\sqrt{5}} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{6} \cdot cos\ t}{\sqrt{5}} \cdot dt$$

$$\int \sqrt{6-5x^2} \cdot dx = \int \sqrt{6 - 5 \cdot \frac{6\ sen^2\ t}{5}} \cdot \frac{\sqrt{6} \cdot cos\ t}{\sqrt{5}} \cdot dt =$$

$$= \int \frac{6}{\sqrt{5}}\ cos^2\ t\ dt = \frac{6}{\sqrt{5}} \int \frac{1 + cos\ 2t}{2}\ dt = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot t +$$

$$+ \frac{3}{2\sqrt{5}}\ sen\ 2t = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot arc\ sen\ \frac{\sqrt{5}\ x}{\sqrt{6}} +$$

$$+ \frac{3}{2\sqrt{5}} \cdot 2 \cdot sen\ t \cdot cos\ t = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot arc\ sen\ \frac{\sqrt{5}\ x}{\sqrt{6}} +$$

$$+ \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}\ x}{\sqrt{6}} \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}\ x}{\sqrt{6}}\right)^2} + C$$

7. Calculamos las primitivas de f(x):

Resolvemos esta integral por el método de la integración de cambio de variable, haciendo:

$x^2 - 1 = t^2 \Rightarrow dx = \dfrac{t\,dt}{x}$.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \cdot dx = \int \frac{t}{x} \cdot \frac{t\ dt}{x} = \int \frac{t^2}{t^2+1}\ dt =$$

$$= \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\ dt = \int \frac{t^2+1}{t^2+1}\ dt - \int \frac{1}{t^2+1}\ dt =$$

$$= t - arc\ tg\ t = \sqrt{x^2-1} - arc\ tg\ \sqrt{x^2-1} + C$$

Todas las primitivas de $f(x)$ son las funciones:

$$F(x) = \sqrt{x^2-1} - arc\ tg\ \sqrt{x^2-1} + C$$

La primitiva buscada que pase por el punto (2, 2) cumple:

$$2 = \sqrt{3} - arc\ tg\ \sqrt{3} + C \Rightarrow C = 2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$$

Luego la primitiva buscada es:

$$F(x) = \sqrt{x^2-1} - arc\ tg\ \sqrt{x^2-1} + \left(2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

## PÁGINA 360

# ACTIVIDADES FINALES

## ACCESO A LA UNIVERSIDAD

8. Calcula:

a) $\int x^3 \cdot e^{x^2}\, dx$  b) $\int \dfrac{e^{2x}}{2+e^x} dx$

9. Resuelve: $\int \cos^3 x \cdot \text{sen}^2 x\, dx$.

10. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

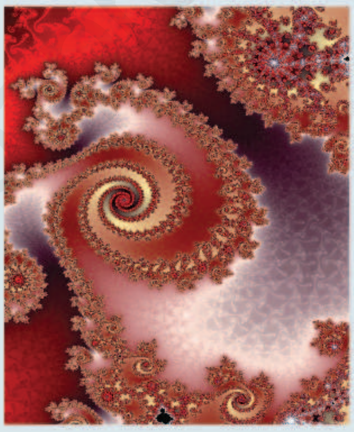
$I_1 = \int e^{3x} \cos 2x\, dx$  $I_2 = \int x\, e^{-x}\, dx$  $I_3 = \int x^2 \text{ sen } x\, dx$

11. Resuelve la siguiente integral indefinida:

$$I = \int \frac{x^3 - x}{x^2 + 4x - 12} dx$$

12. Calcula:

$$I = \int \frac{x+1}{x^2 - x} dx$$



13. Resuelve las siguientes integrales indefinidas:

$I_1 = \int \dfrac{x-1}{x^2+2x+3} dx$  $I_2 = \int \dfrac{5x+8}{2x^2+x-3} dx$

14. Resuelve $\int \dfrac{4^x + 5 \cdot 16^x}{1+16^x} dx$.

15. Calcula $\int \dfrac{1+\ln x}{x(\ln^2 x - \ln x)} dx$.

16. Calcula la primitiva de la función $f(x) = [\ln x]^2$ que se anule en $x = e$.

17. Calcula, integrando por partes, las siguientes integrales. Comprueba el resultado por derivación.

$I_1 = \int x \cdot \text{sen}(\ln x)\, dx$  $I_2 = \int x \cdot \ln(x^2+1)\, dx$  $I_3 = \int x^2 \cdot \ln(2x+1)\, dx$

18. Halla $f(x)$ si sabemos que $f(0) = 1$; $f'(0) = 2$ y $f''(x) = 3x$.

19. Calcula una función real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple las condiciones siguientes:

$f'(0) = 5$, $f''(0) = 1$, $f(0) = 0$ y $f'''(x) = x + 1$

8. Las integrales quedan:

a) Haciendo el cambio de variable $x^2 = t$ obtenemos:

$\int x^3 \cdot e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int t \cdot e^t dt$ resolviendo esta integral por partes obtenemos:

$$\int x^3 \cdot e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int t \cdot e^t dt = \frac{1}{2} e^{x^2}\left(x^2 - 1\right) + C$$

b) Haciendo el cambio de variable $e^x = t$ obtenemos:

$$\int \frac{e^{2x}}{2+e^x}\, dx = \int \frac{t}{2+t}\, dt = \int \frac{2+t}{2+t}\, dt - \int \frac{2}{2+t}\, dt = t - 2\ln(2+t) = e^x - 2\ln\left(2+e^x\right) + C$$

9. La solución queda:

$$\int \cos^3 x \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot dx = \int \cos x \cdot \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot dx = \int \left(\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x\right) \cdot \cos x \cdot dx = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C$$

10. Todas las integrales pueden calcularse utilizando integración por partes. Obtenemos:

$$I_1 = \int e^{3x} \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\, e^{3x} \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{2}\int e^{3x} \operatorname{sen} 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\, e^{3x} \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{2}\left\{ -\frac{1}{2}\, e^{x} \cos 2x + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}\int e^{3x} \cos 2x\, dx \right\}$$

$$I_1 = \frac{2}{13}\, e^{3x} \operatorname{sen} 2x + \frac{3}{13}\, e^{3x} \cos 2x\, dx + C$$

$$I_2 = \int x e^{-x}\, dx = -x e^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C$$

$$I_3 = \int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x - 2 \int \operatorname{sen} x\, dx =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C$$

11. La solución es:

$$I = \int \frac{x^3 - x}{x^2 + 4x - 12}\, dx = \int \left[ x - 4 + \frac{27x - 48}{x^2 + 4x - 12} \right] dx =$$

$$= \int x\, dx - 4 \int dx + \int \frac{27x - 48}{x^2 + 4x - 12}\, dx =$$

$$= \int x\, dx - 4 \int dx + \frac{3}{4} \int \frac{1}{x - 2}\, dx + \frac{105}{4} \int \frac{1}{x + 6}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{3}{4}\, ln\, |x - 2| + \frac{105}{4}\, ln\, |x + 6| + C.$$

12. La integral es:

$\int \frac{x+1}{x^2 - x} dx$ Descomponemos la fracción $\frac{x+1}{x^2 - x}$ en suma de fracciones simples:

$$\frac{x + 1}{x\,(x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x + 1}{x\,(x - 1)} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x - 1}$$

$$\int \frac{x + 1}{x^2 - x}\, dx = \int \frac{-1}{x}\, dx + \int \frac{2}{x - 1}\, dx =$$

$$= -\, ln\, |x| + 2\, ln\, |x - 1| + C$$

13. La solución en cada caso es:

$$I_1 = \int \frac{x-1}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx -$$

$$- \int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+3}\,dx -$$

$$- \int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx -$$

$$-2\int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\,ln\,|x^2+2x+3| -$$

$$-\sqrt{2}\int \frac{1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,ln\,|x^2+2x+3| - \sqrt{2}\cdot arc\,tg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$I_2 = \int \frac{5x+8}{2x^2+x-3}\,dx = \int\left[\frac{13/5}{x-1} - \frac{1/5}{2x+3}\right]dx =$$

$$= \frac{13}{5}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{10}\int \frac{2}{2x+3}\,dx =$$

$$= \frac{13}{5}\,ln\,|x-1| - \frac{1}{10}\,ln\,|2x+3| + C$$

14. Quedan:

$$\int \frac{4^x+5\cdot 16^x}{1+16^x}\,dx = \int \frac{4^x}{1+16^x}\,dx + \int \frac{5\cdot 16^x}{1+16^x}\,dx =$$

$$= \int \frac{4^x}{1+(4^x)^2}\,dx + 5\int \frac{16^x}{1+16^x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{ln\,4}\int \frac{4^x\cdot ln\,4}{1+(4^x)^2}\,dx + \frac{5}{ln\,16}\int \frac{16^x\cdot ln\,16}{1+16^x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{ln\,4}\cdot arc\,tg\,(4^x) + \frac{5}{ln\,16}\cdot ln\,|1+16^x| + C$$

15. Haciendo $t = \ln x, dt = \frac{dx}{x}$ la integral queda:

$$\int \frac{1 + \ln x}{x\,(\ln^2 x - \ln x)}\, dx = \int \frac{1 + t}{t^2 - t}\, dt =$$

$$= \int \left[ -\frac{1}{t} + \frac{2}{t-1} \right] dt = -\int \frac{1}{t}\, dt + 2\int \frac{1}{t-1}\, dt =$$

$$= -\ln |t| + 2 \ln |t-1| + C = -\ln |\ln x| +$$

$$+ 2 \ln |\ln x - 1| + C.$$

16. $\int (\ln x)^2\, dx = I$

$$\left. \begin{aligned} u = (\ln x)^2 \Rightarrow du = 2\,(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{aligned} \right\}$$

$$I = \int (\ln x)^2\, dx = x \cdot (\ln x)^2 - \int 2 \ln x \cdot dx$$

$$\left. \begin{aligned} u = 2 \ln x \Rightarrow du = \frac{2}{x}\, dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{aligned} \right\}$$

$$I = \int (\ln x)^2\, dx = x \cdot (\ln x)^2 - \left[ 2x \ln x - \int 2\, dx \right] =$$

$$= x\,(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$$

Todas las primitivas de f(x) = $(\ln x)^2$ son las funciones de la forma:

$$F(x) = x\,(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$$

Lo que se anula para $x = e$ verificara: $0 = e - 2e + 2e + C \Rightarrow C = -e$

La primitiva buscada es:

$$F(x) = x\,(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x - e$$

17. Las integrales quedan del siguiente modo:

$$I_1 = \int x \cdot \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$$

$$\left.\begin{array}{r} u = \operatorname{sen}(\ln x) \Rightarrow du = \cos(\ln x) \cdot \dfrac{1}{x} \cdot dx \\ dv = x\, dx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\}$$

$$I_1 = \int x \cdot \operatorname{sen}(\ln x)\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sen}(\ln x) -$$

$$-\int \frac{x}{2} \cdot \cos(\ln x)\, dx$$

Esta última integral la resolvemos por el mismo método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{r} u = \cos(\ln x) \Rightarrow du = -\operatorname{sen}(\ln x) \cdot \dfrac{1}{x} \cdot dx \\ dv = \dfrac{x}{2}\, dx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{4} \end{array}\right\}$$

$$I_1 = \int x \cdot \operatorname{sen}(\ln x)\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{sen}(\ln x) -$$

$$-\left[\frac{x^2}{4} \cos(\ln x) - \int -\frac{x}{4} \operatorname{sen}(\ln x)\, dx\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{x^2}{2} \operatorname{sen}(\ln x) - \frac{x^2}{4} \cos(\ln x) - \frac{1}{4} I_1$$

$$\frac{5}{4} I_1 = \frac{x^2}{2} \operatorname{sen}(\ln x) - \frac{x^2}{4} \cos(\ln x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{4}{5}\left[\frac{x^2}{2} \operatorname{sen}(\ln x) - \frac{x^2}{4} \cos(\ln x)\right] + C$$

$$I_1 = \int x \cdot \operatorname{sen}(\ln x)\, dx = \frac{2x^2 \operatorname{sen}(\ln x)}{5} -$$

$$-\frac{x^2 \cos(\ln x)}{5} + C$$

Vamos a comprobar el resultado, para ello veremos que la derivada del segundo miembro es igual a la función del primer miembro:

$$D\left[\frac{2x^2 \cdot sen\,(ln\,x)}{5} - \frac{x^2 \cdot cos\,(ln\,x)}{5} + C\right] =$$

$$= \frac{4x \cdot sen\,(ln\,x) + 2x^2 \cdot cos\,(ln\,x) \cdot \frac{1}{x}}{5} -$$

$$- \frac{2x \cdot cos\,(ln\,x) - x^2\,sen\,(ln\,x) \cdot \frac{1}{x}}{5} =$$

$$= \frac{4x \cdot sen\,(ln\,x) + 2x \cdot cos\,(ln\,x) - 2x \cdot cos\,(ln\,x) + x \cdot sen\,(ln\,x)}{5} =$$

$$= \frac{5x \cdot sen\,(ln\,x)}{5} = x \cdot sen\,(ln\,x)$$

$$I_2 = \int x \cdot ln\,(x^2+1)\,dx = \frac{x^2}{2}\,ln\,(x^2+1) - \int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\,ln\,(x^2+1) - \int x\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\,ln\,(x^2+1) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\,ln\,(x^2+1) + C$$

Hallamos la derivada de la función:

$$D\left[\frac{x^2}{2}\,ln\,(x^2+1) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\,ln\,(x^2+1) + C\right] =$$

$$= x\,ln\,(x^2+1) + \frac{x^3}{x^2+1} - x + \frac{x}{x^2+1} = x\,ln\,(x^2+1)$$

$$I_3 = \int x^2 \cdot ln\,(2x+1)\,dx = \frac{1}{3}\,x^3\,ln\,(2x+1) -$$

$$-\frac{1}{3}\int \frac{2x^3}{2x+1}\,dx = \frac{1}{3}\,x^3\,ln\,(2x+1) -$$

$$-\frac{1}{3}\int \left[x^2 - \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{2x+1}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{3}\,x^3\,ln\,(2x+1) - \frac{1}{3}\int x^2\,dx + \frac{1}{6}\int x\,dx -$$

$$-\frac{1}{12}\int dx + \frac{1}{24}\int \frac{2}{2x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\,x^3\,ln\,(2x+1) - \frac{1}{9}\,x^3 + \frac{1}{12}\,x^2 - \frac{1}{12}\,x +$$

$$+\frac{1}{24}\,ln\,(2x+1) + C$$

Hallamos la derivada de la función anterior:

$$D\,(I_3) = x^2\,ln\,(2x+1) + \frac{2}{3}\,\frac{x^3}{2x+1} - \frac{1}{3}\,x^2 +$$

$$+\frac{1}{6}\,x - \frac{1}{12} + \frac{1}{12}\,\frac{1}{2x+1} = x^2\,ln\,(2x+1)$$

18. La solución es:

Si $f''(x) = 3x \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{2} + C$

Como $f'(0) = 2 \Rightarrow C = 2$, por tanto:

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2} + 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{2} + 2x + D$$

Como $f(0) = 1 \Rightarrow D = 1$, luego la función $f(x)$ buscada es:

$$f(x) = \frac{x^3}{2} + 2x + 1$$

19. La función buscada es: $f(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 5x$