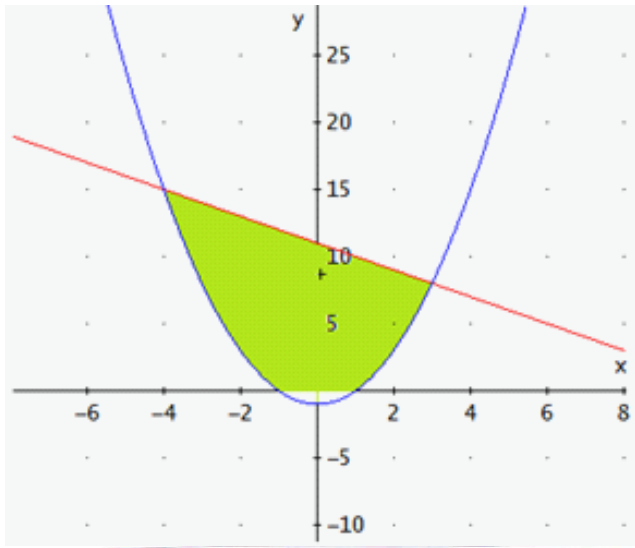


Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 1$, $y = 11 - x$ y el eje OX . Dibujar el recinto.



$$A = \int_a^b [(11-x) - (x^2-1)] dx - \int_c^d (x^2-1) dx$$

donde a y b son los puntos de corte de $y = 11 - x$ e $y = x^2 - 1$, c y d son los puntos donde $y = x^2 - 1$ corta al eje OX .

Puntos de corte de las funciones

$$11 - x = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} -4 \\ 3 \end{cases}$$

Puntos donde $y = x^2 - 1$ corta al eje OX

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Área

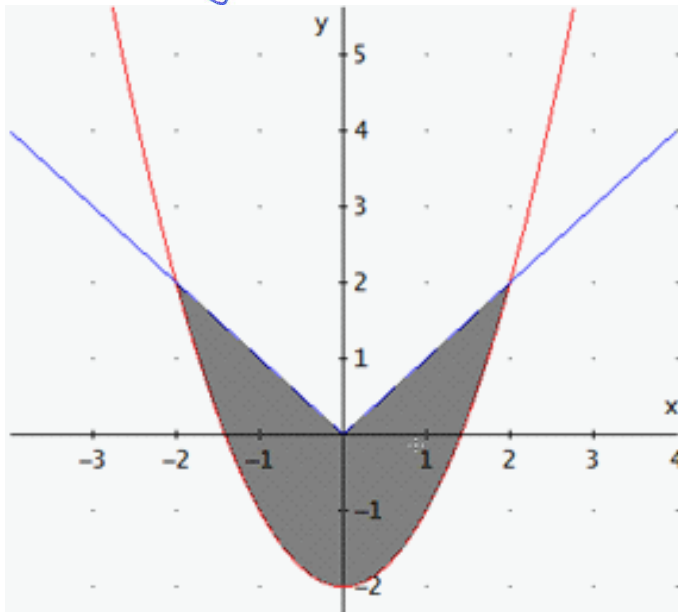
$$A = \int_{-4}^3 (-x^2 - x + 12) dx - \left| \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx \right| = \frac{343}{6} - \frac{4}{3} = \boxed{\frac{335}{6} u^2}$$

$$\int_{-4}^3 (-x^2 - x + 12) dx = \left. -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x \right|_{-4}^3 = \frac{343}{6}$$

$$\int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx = \left. \frac{x^3}{3} - x \right|_{-1}^1 = -\frac{4}{3}$$

$$= \left(\frac{1^3}{3} - 1 \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - (-1) \right) = \frac{1}{3} - 1 - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$$

Hallar el área del recinto plano delimitado por la ecuación $y = x^2 - 2$ e $y = |x|$. Dibujar el recinto.



Puntos de corte

$$x^2 - 2 = |x| \Rightarrow x^2 - 2 = \pm x$$

$$x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \text{ No.}$$

$$x^2 - 2 = -x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases} \text{ No.}$$

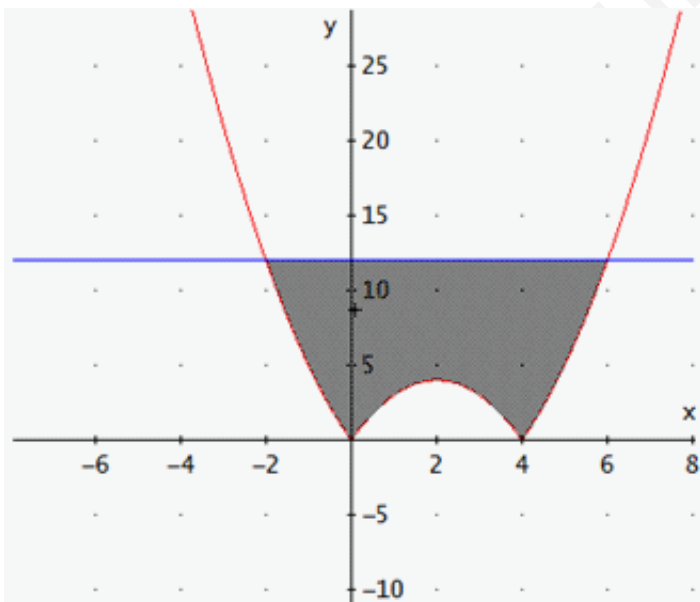
Área

$$A = 2 \int_0^2 (x - x^2 + 2) dx =$$

$$= 2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \Big|_0^2 \right) = \boxed{\frac{20}{3} u^2}$$

Página 127 → Otra propuesta 1 de 2000 → 3^{er} Bl. → A)

Calcular el área de la región plana limitada por la curva $f(x) = |x^2 - 4x|$ y la recta $y = 12$. Dibujar el recinto.



Puntos de corte

$$|x^2 - 4x| = 12 \Rightarrow x^2 - 4x = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -2 \\ 6 \end{cases}$$

Área

$$A = \int_{-2}^6 (12 - (x^2 - 4x)) dx =$$

$$= \int_{-2}^6 (12 - x^2 + 4x) dx = 12x - \frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} \Big|_{-2}^6 =$$

$$= \boxed{64 u^2}$$

De otra forma :

$$A = \int_{-2}^0 [12 - |x^2 - 4x|] dx = \int_{-2}^0 [12 - (x^2 - 4x)] dx + \int_0^4 [12 + (x^2 - 4x)] dx +$$

$$+ \int_4^6 [12 - (x^2 - 4x)] dx = \frac{40}{3} + \frac{112}{3} + \frac{40}{3} = \boxed{64 u^2}$$

Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = -2x^2 + 4x$ y las tangentes a dicha gráfica en los puntos en que esta corta al eje de abscisas. Dibujar el recinto.

Puntos de corte con el eje OX

$$-2x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(-2x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Tangentes a $f(x)$ en $x=0$ y $x=2$

$$\boxed{x_0=0} \quad y - y_0 = f'(0)(x - x_0)$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -4x + 4 \\ f'(0) = 4 \end{array} \right| \begin{array}{l} y_0 = f(0) = 0 \\ x_0 = 0 \end{array}$$

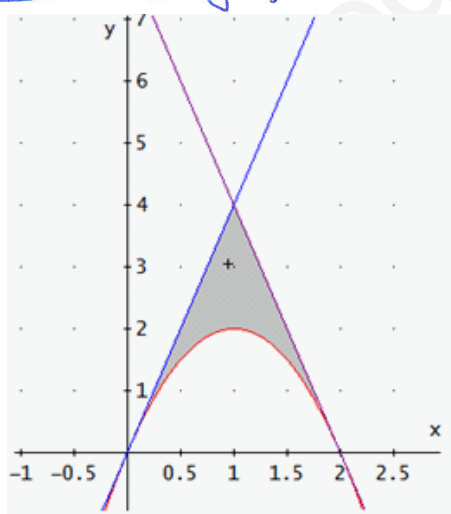
$y = 4x$ recta tangente a $f(x)$ en $x_0 = 0$

$$\boxed{x_1=2} \quad y - y_1 = f'(2)(x - x_1)$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(2) = -4 \\ x_1 = 2 \end{array} \right| \begin{array}{l} y_1 = f(2) = 0 \\ x_1 = 2 \end{array}$$

$y = -4(x - 2)$
 $= -4x + 8$ recta tangente a $f(x)$ en $x_1 = 2$

Representación gráfica



Área

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{triángulo}} - A_{\text{arco parábola}} \\ &= \frac{2 \cdot 4}{2} - \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx \\ &= 4 - \frac{8}{3} = \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3} u^2 \end{aligned}$$

De otra forma:

$$A = 2 \int_0^1 (4x - (-2x^2 + 4x)) dx = 2 \left(\frac{4x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} \Big|_0^1 \right) = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} u^2$$

Pto en el que se cortan las tangentes

$$4x = -4x + 8 \Rightarrow x = 8x = 8 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \underline{\underline{y = 4}}$$

Dada la parábola $y = \frac{x^2}{4}$ y la recta $y = x$:

a) Dibuja las gráficas de la parábola y de la recta.

b) Señala el recinto plano comprendido entre las dos gráficas anteriores.

c) Calcula el área del recinto plano señalado.

$$f(x) = \frac{x^2}{4}$$

$$\text{Vértice: } \left. \begin{array}{l} x_v = 0 \\ y_v = 0 \end{array} \right\} V(0,0)$$

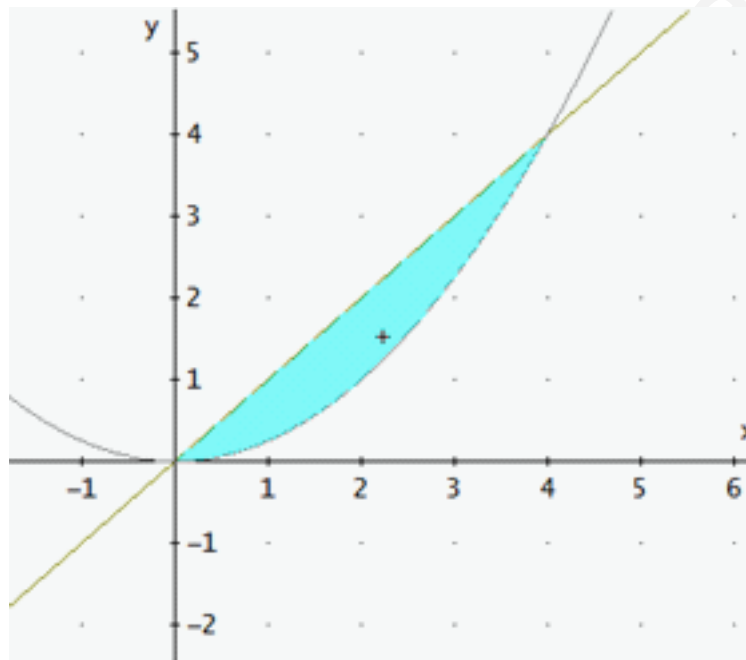
Tabla

x	2	4
y	1	4

$$g(x) = x$$

Tabla

x	y
0	0
2	2



Área:

$$A = \int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4} \right) dx = \left. \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \frac{x^3}{3} \right|_0^4 = \frac{8}{3} u^2$$

Puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x^2}{4} = x \Rightarrow x^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

Dibuja el recinto delimitado por las curvas $y = -x^2 + 2x + 3$ e $y = |x+1|$.
Halla el área del recinto.

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

$$\text{Vértice: } x_v = \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} V(1, 4)$$

$$y_v = -1 + 2 + 3 = 4$$

Puntos de corte con el eje OX

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

$$g(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -x-1 & x < -1 \end{cases}$$

$$x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$$

$$y = x+1$$

$$y = -x-1$$

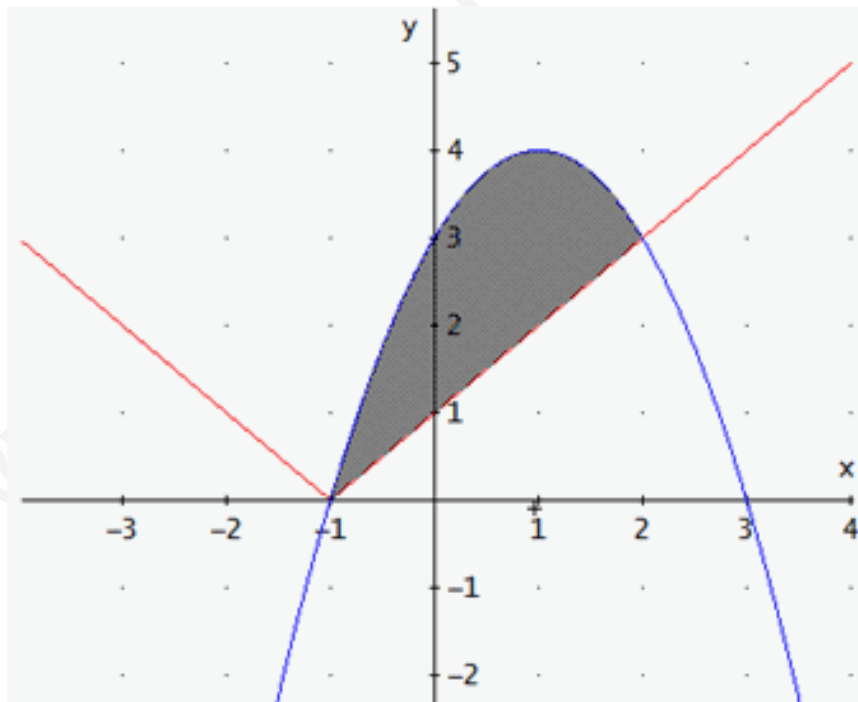
x	y
-1	0
0	1

x	y
-1	0
-2	1
-3	2

Puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = |x+1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 = x+1 & \Rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases} \\ -x^2 + 2x + 3 = -x-1 & \Rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases} \text{ No es sol.} \end{cases}$$



Área:

$$A = \int_{-1}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + 2x + 3 - \underbrace{(x+1)}_{\uparrow}) dx = \boxed{\frac{9}{2} u^2}$$

En $[-1, 2]$ $y = x+1$
es ≥ 0 , luego coincide
con $g(x)$

Dada la función $y = xe^x$ y las rectas $x=1$, e $y=0$:

a) Dibuja la gráfica de la función para $x > 0$ y la de las rectas.

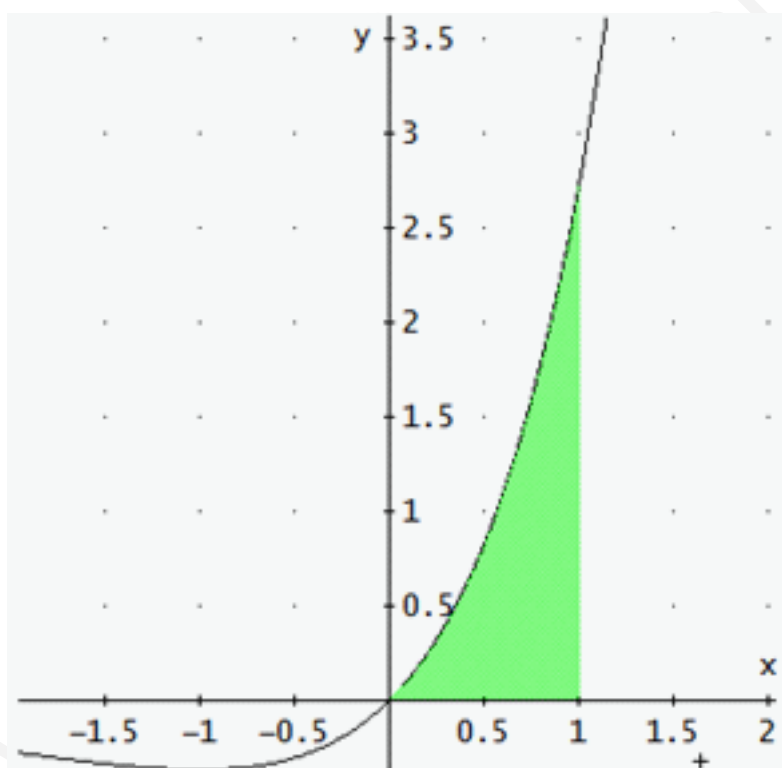
b) Señala el recinto plano comprendido entre las tres gráficas anteriores.

c) Calcula el área del recinto plano señalado.

$$f(x) = xe^x, x > 0$$

$f'(x) = e^x + xe^x > 0 \Rightarrow f(x)$ es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$ y continua

x	0	1	2	3
f(x)	0	e	2e ²	3e ³
≈ f(x)	0	2,7	14,8	60,3



Área

$$A = \int_0^1 xe^x dx = xe^x - e^x \Big|_0^1 = 1 \cdot e^1 - e^1 - (0 \cdot e^0 - e^0) = \boxed{1 \text{ u}^2}$$

Ptos de corte de $f(x)$ con las rectas dadas

$f(x)$ corta al eje Ox ($y=0$) en $x=0$

$f(x)$ corta a $x=1$ en $x=1$

$$\begin{aligned} \text{Cálculo de } \int xe^x dx &= \left[\begin{array}{l} u=x \rightarrow du=dx \\ dv=e^x dx \rightarrow v=e^x \end{array} \right] = xe^x - \int e^x dx = \\ &= xe^x - e^x \end{aligned}$$

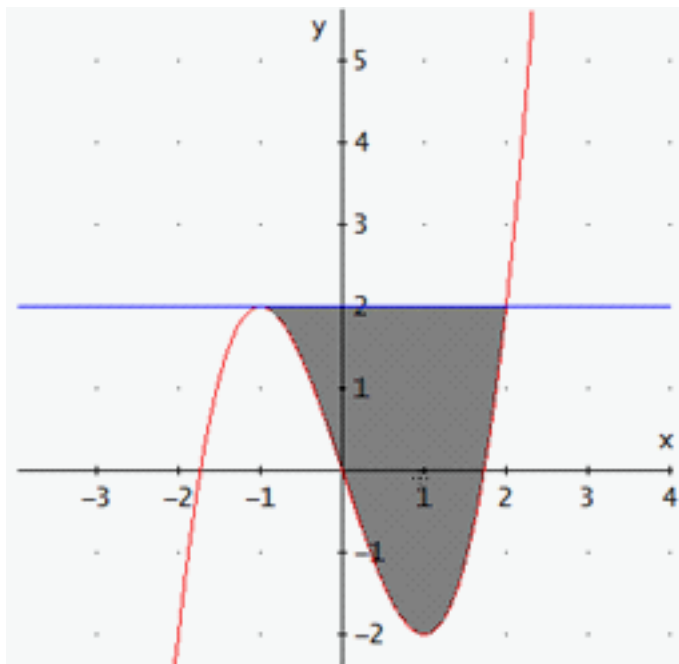
Halla la ec. de la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ en el punto de abscisa $x = -1$. Calcula el área del recinto limitado por la recta y la curva dada.

Ecuación de la recta tangente

$$y - y_0 = f'(-1)(x - x_0) \text{ donde } \begin{cases} y_0 = f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = 2 \\ x_0 = -1 \\ f'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow f'(-1) = 0 \end{cases}$$

$$y - 2 = 0(x - (-1)) \Rightarrow y - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

Representación gráfica ó resolver la inecuación $f(x) > 2$



$$\begin{array}{c} f(x) > 2 \\ x^3 - 3x > 2 \\ x^3 - 3x = 2 \end{array}$$

No	No	Sí
-1		2

Es decir, en el intervalo $[-1, 2]$, que es el que nos interesa, $2 > x^3 - 3x$

Área:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 [2 - (x^3 - 3x)] dx = \int_{-1}^2 (-x^3 + 3x + 2) dx = \\ &= \left. \frac{-x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x \right|_{-1}^2 = \boxed{\frac{27}{4} \text{ u}^2} \end{aligned}$$

Puntos de corte de $f(x)$ y la recta $y = 2$

$$f(x) = 2 \Rightarrow x^3 - 3x = 2 \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$$

1	0	-3	-2
-1	-1	1	2
1	-1	-2	0
2	2	2	
1	1	0	

$$x = \begin{cases} -1 \text{ (doble)} \\ 2 \end{cases}$$

Dadas las funciones $y = -x^2 + 4$ e $y = |x+2|$.

a) Dibuja ambas gráficas.

b) Señala el recinto plano comprendido entre ambas.

c) Calcula el área del recinto plano señalado.

$$f(x) = -x^2 + 4$$

$$\text{Vértice: } \left. \begin{array}{l} x_v = 0 \\ y_v = 4 \end{array} \right\} V(0, 4)$$

Puntos de corte:

$$-x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$y = |x+2| = \begin{cases} x+2 & x \geq -2 \\ -(x+2) & x < -2 \end{cases}$$

$$x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$$

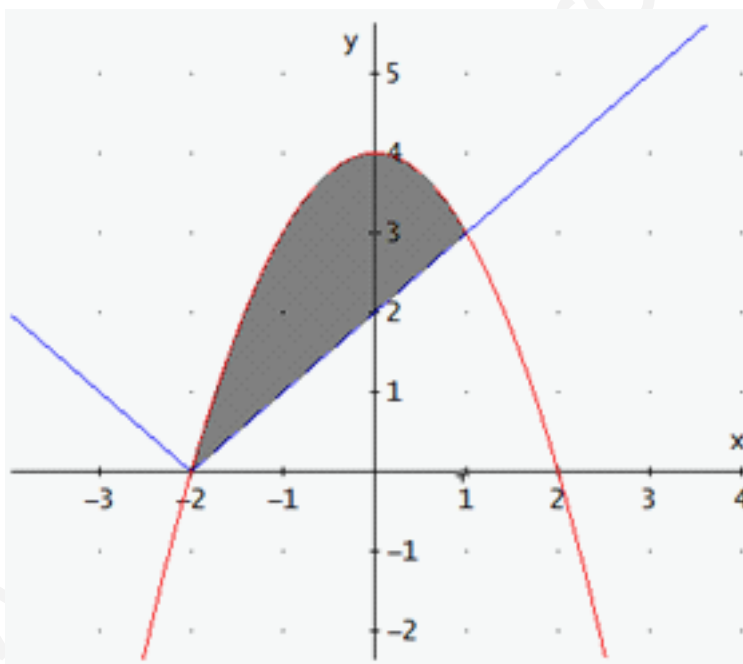
$$y = x+2$$

x	y
-2	0
-1	1

$$y = -(x+2)$$

x	y
-2	0
-3	1
-4	2

Representación gráfica



Área

$$A = \int_{-2}^1 [(-x^2 + 4) - (x+2)] dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2} \text{ u}^2$$

Puntos de corte:

$$-x^2 + 4 = |x+2| \Rightarrow -x^2 + 4 = \pm(x+2) \Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 4 = x+2 \Rightarrow x = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases} \\ -x^2 + 4 = -(x+2) \Rightarrow x = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases} \text{ No en sol.} \end{cases}$$

Dada la curva $y = x^2 - 4x + 3$ y la recta $y = -x + 3$:

a) Dibuja la gráfica de la parábola y de la recta.

b) Señala el recinto plano comprendido entre ambas.

c) Calcula el área de ese recinto.

$$y = x^2 - 4x + 3$$

$$\text{Vértice: } x_v = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_v = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} x_v = 2 \\ y_v = -1 \end{array} \right\} V(2, -1)$$

Puntos de corte con el eje Ox

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$$

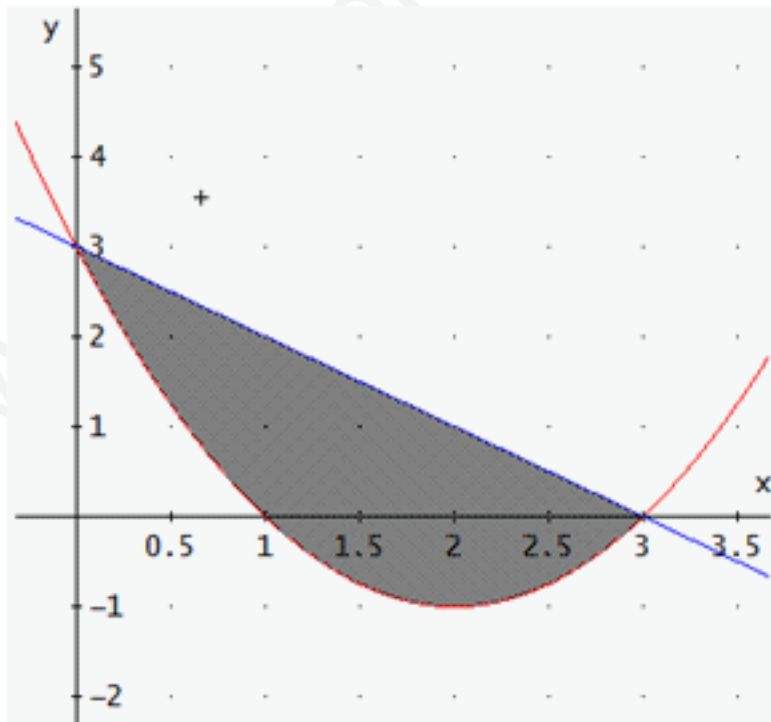
$$y = -x + 3$$

x	y
0	3
3	0

Puntos de corte de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x + 3$

$$x^2 - 4x + 3 = -x + 3 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases}$$



Área:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 [(-x+3) - (x^2-4x+3)] dx = \int_0^3 (-x^2+3x) dx = \\ &= \left. \frac{-x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right|_0^3 = \frac{-3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} = \frac{9}{2} \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Dada la curva $y = x^2 - 4x$ y la recta $y = 3x - 6$.

a) Dibuja la gráfica de ambas.

b) Señala el recinto plano comprendido entre ambas.

c) Calcula el área del recinto señalado.

$$f(x) = x^2 - 4x$$

$$\text{Vértice: } \left. \begin{aligned} x_v &= \frac{4}{2} = 2 \\ y_v &= 2^2 - 4 \cdot 2 = -4 \end{aligned} \right\} V(2, -4)$$

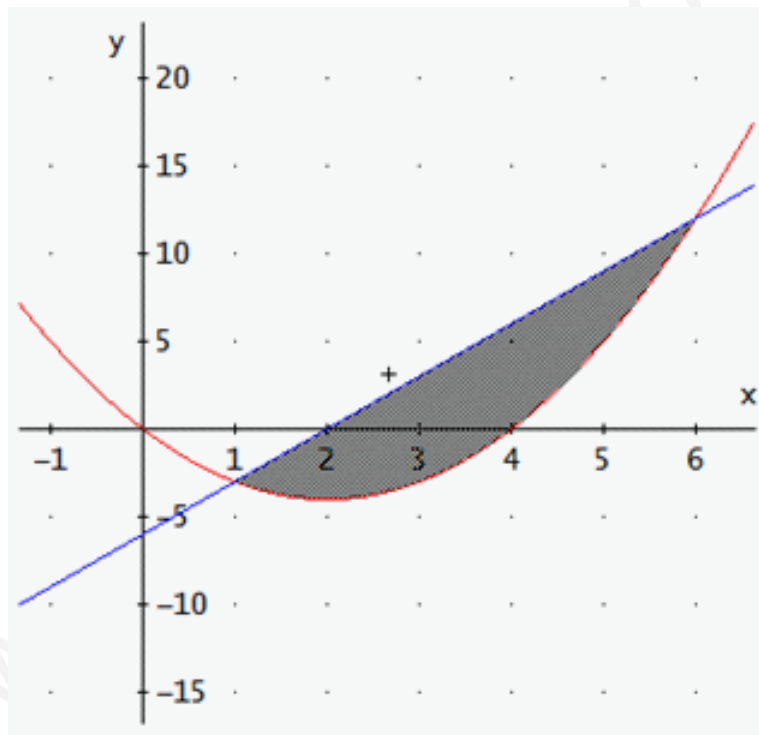
Puntos de corte con el eje OX

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$x(x-4) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

$$y = 3x - 6$$

x	y
0	-6
6	0



Puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 4x = 3x - 6 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 6 \end{cases}$$

Área:

$$A = \int_1^6 [(3x - 6) - (x^2 - 4x)] dx = \int_1^6 (-x^2 + 7x - 6) dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 6x \Big|_1^6 = \left(-\frac{6^3}{3} + \frac{7 \cdot 6^2}{2} - 6 \cdot 6 \right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{7 \cdot 1^2}{2} - 6 \cdot 1 \right) =$$
$$= \frac{125}{6} \text{ u}^2$$

De la función f de \mathbb{R} en \mathbb{R} definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x=1$, y un punto de inflexión en $(0,0)$ y que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{4}$. Calcula a, b, c y d .

- f tiene un máx. relativo en $x=1 \Rightarrow f'(1) = 0$
- f tiene un pto. de inflexión en $(0,0) \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$
- $\int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{4}$ es la 4ª condición

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f'(1) = 3a + 2b + c = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 3a + c = 0 \quad (1)$$

$$f''(0) = 2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$f(0) = d = 0$$

$$\int_0^1 (ax^2 + cx) dx = a \frac{x^3}{3} + c \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{c}{2} = \frac{2a+3c}{6} = \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(2a+3c) = 30$$

$$8a + 12c = 30$$

$$4a + 6c = 15 \quad (2)$$

Resolvemos el sistema (1)-(2)

$$\begin{cases} 3a + c = 0 \\ 4a + 6c = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{11} \\ c = \frac{15}{11} \end{cases}$$

Por tanto, la función es

$$f(x) = -\frac{5}{11}x^3 + \frac{15}{11}x$$

Dadas las curvas $y = \sqrt{3x}$ e $y = \frac{1}{3}x^2$.

a) Dibuja las gráficas.

b) Señala el recinto plano comprendido entre ambas.

c) Calcula el área de dicho recinto.

$$f(x) = \sqrt{3x}$$

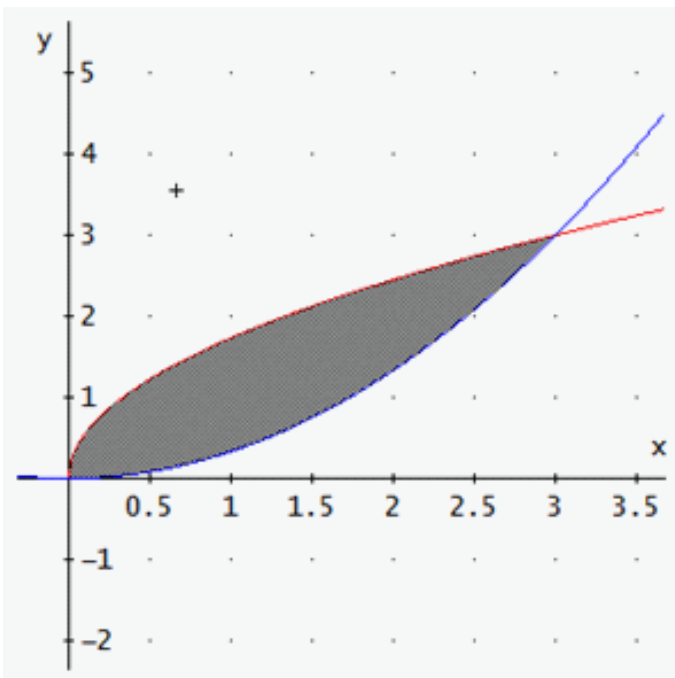
x	0	3
y	0	3

$$g(x) = \frac{1}{3}x^2$$

$$\text{Vértice: } \left. \begin{array}{l} x_v = 0 \\ y_v = 0 \end{array} \right\} V(0,0)$$

Tabla:

x	3	6	-3
y	3	12	3



Área:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 \left(\sqrt{3x} - \frac{1}{3}x^2 \right) dx = \\ &= \int_0^3 \sqrt{3}\sqrt{x} dx - \frac{1}{3} \int_0^3 x^2 dx = \\ &= \sqrt{3} \int_0^3 x^{1/2} dx - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = \\ &= \sqrt{3} \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big|_0^3 - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = \\ &= \boxed{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{3x} = \frac{1}{3}x^2 \Rightarrow 3x = \left(\frac{1}{3}x^2 \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = \frac{x^4}{9} \Rightarrow 27x = x^4 \Rightarrow x^4 - 27x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 27) = 0$$

1	0	0	-27
3	3	9	27
1	3	9	0

$$\Rightarrow x(x-3)(x^2+3x+9) = 0$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases}$$

Considera la función $f(x) = -x^4 + 4x^3$. Calcula:

a) Puntos de corte con los ejes.

b) Máximos y mínimos.

c) Puntos de inflexión.

d) Halla el área de la región encerrada por la gráfica y el eje OX.

$$a) f(x) = 0 \Rightarrow -x^4 + 4x^3 = 0 \Rightarrow x^3(-x+4) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \text{ (triple)} \\ 4 \end{cases}$$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son: $(0,0)$ y $(4,0)$

Con el eje OY: $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (0,0)$

$$b) f'(x) = -4x^3 + 12x^2$$

$$f''(x) = -12x^2 + 12$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 12x^2 = 0 \Rightarrow x^2(-4x+12) = 0 \Rightarrow$$

$$x = \begin{cases} 0 \\ 3 \end{cases}$$

$f''(0) = 12 > 0 \Rightarrow x=0$ es un mín. relativo.

$f''(3) < 0 \Rightarrow x=3$ es un máx. relativo.

c) Puntos de inflexión

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -12x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f'''(x) = -24x$$

$f'''(1) = -24 < 0 \Rightarrow x=1$ es un pto. de inflexión.

$f'''(-1) = 24 > 0 \Rightarrow x=-1$ " " " de inflexión.

d) Área

$$A = \int_0^4 f(x) dx = \int_0^4 (-x^4 + 4x^3) dx =$$

$$= -\frac{x^5}{5} + 4 \frac{x^4}{4} \Big|_0^4 = -\frac{4^5}{5} + 4^4 =$$

$$= \boxed{\frac{256}{5} u^2}$$

