

Opción A

1.- Sean F_1, F_2, F_3 , las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2 . Calcula, indicando las propiedades que utilices:

- a) **[0,5 puntos]** El determinante de B^{-1} .
 b) **[0,5 puntos]** El determinante de $(B^t)^4$ (B^t es la matriz traspuesta de B).
 c) **[0,5 puntos]** El determinante de $2B$.
 d) **[1 punto]** El determinante de una matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son $5F_1 - F_3, 3F_3, F_2$.

2.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$

a) **[1 punto]** Halla los valores del parámetro m para los que el rango de A es menor que 3

b) **[1,5 puntos]** Estudia si el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene solución para cada uno de los valores de m obtenidos en el apartado anterior.

3.- **[2,5 puntos]** Se considera la recta r definida por $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\lambda-2 \end{cases}$ y la recta s definida por $\begin{cases} x=\mu \\ y=\mu-1 \\ z=-1 \end{cases}$. Halla la ecuación de la recta perpendicular común a r y s .

4.- Dada la recta r definida por $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$

- a) **[0,75 puntos]** Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r .
 b) **[0,75 puntos]** Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r .
 c) **[1 punto]** Dados los puntos $A = (2, 1, 1)$ y $B = (0, 0, 1)$, halla los puntos C en el eje OX tales que el área del triángulo de vértices A, B y C es 2.

Opción B

1.- Se sabe que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es -3 . Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes

determinantes:

a) **[1 punto]** $\det(-2A)$ y $\det(A^{-1})$.

b) **[1,5 puntos]** $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} + a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} + a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} + a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

2.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$$

- a) **[1,5 puntos]** Discútelos según los valores del parámetro a .
 b) **[1 punto]** Resuelve el caso $a = 2$.

3.- Sea la recta s dada por

$$\begin{cases} x-z=-1 \\ 2y-z=3 \end{cases}$$

- a) **[1,25 puntos]** Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a la recta s y contiene a la recta r , dada por $x-1=-y+2=z-3$
 b) **[1,25 puntos]** Estudia la posición relativa de la recta s y el plano π_2 , de ecuación $x+y=3$, y deduce la distancia entre ambos.

4.- Sean los vectores $\vec{u} = (1,-1,3)$, $\vec{v} = (1,0,-1)$ y $\vec{w} = (\lambda,1,0)$.

- a) **[0,75 puntos]** Calcula los valores λ que hacen que \vec{u} y \vec{w} sean ortogonales.
 b) **[0,75 puntos]** Calcula los valores λ que hacen que \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} sean linealmente independientes.
 c) **[1 punto]** Para $\lambda = 1$ escribe el vector $\vec{r} = (3, 0, 2)$ como combinación lineal de \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} .

SOLUCIÓN DE LA PRUEBA

Opción A

1.- Sean F_1, F_2, F_3 , las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2 . Calcula, indicando las propiedades que utilices:

a) [0,5 puntos] El determinante de B^{-1} .

b) [0,5 puntos] El determinante de $(B^t)^4$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

c) [0,5 puntos] El determinante de $2B$.

d) [1 punto] El determinante de una matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5F_1 - F_3, 3F_3, F_2$.

Solución:

a) Para calcular el determinante de B^{-1} utilizamos la propiedad de que el determinante de la matriz identidad vale 1:

$$B \cdot B^{-1} = I_3 \Rightarrow |B \cdot B^{-1}| = |I_3| = 1.$$

Por otro lado sabemos que el determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de dichas matrices:

$$|B| \cdot |B^{-1}| = |-2 \cdot B^{-1}| \Rightarrow |B^{-1}| = -\frac{1}{2}.$$

b) Para calcular el determinante de $(B^t)^4$ utilizamos la propiedad de que el determinante de un producto de matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de dichas matrices:

$$|(B^t)^4| = |B^t|^4 = (-2)^4 = 16.$$

c) Para calcular el determinante de $2B$ utilizamos la propiedad de que si una fila está multiplicada por un número dicho número es factor común del determinante.

$$|2B| = |(2F_1, 2F_2, 2F_3)| \Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 2 |(F_1, F_2, F_3)| = 2^3(-2) = -16.$$

d) Para calcular el determinante de la matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5F_1 - F_3, 3F_3, F_2$ utilizamos las propiedades de que si:

- una fila está multiplicada por un número dicho número puede salir fuera del determinante factor común multiplicando al determinante
- si una fila de un determinante es suma de dos sumandos dicho determinante es igual a la suma de dos determinantes colocando en dicha fila el primer y segundo sumando respectivamente,
- si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales el determinante es cero,
- si una fila está multiplicada por un número dicho número puede salir fuera del determinante como factor común, multiplicando al determinante.

$$|(5F_1 - F_3, 3F_3, F_2)| = |(5F_1, 3F_3, F_2)| + |(-F_3, 3F_3, F_2)| = 5 \cdot 3 \cdot |(F_1, F_3, F_2)| + 0 = -15 \cdot |(F_1, F_2, F_3)| = (-15) \cdot (-2) = 30.$$

Ejercicio 2. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$

a) [1 punto] Halla los valores del parámetro m para los que el rango de A es menor que 3.

b) [1,5 puntos] Estudia si el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene solución para cada uno de los valores de m obtenidos en el apartado anterior.

Solución:

Si $|A| \neq 0$, el rango de la matriz A es 3. Vamos a calcularlo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos el determinante sacando factor común m en la 2ª y 3ª filas:

$$|A| = m \cdot m \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$$

Restamos a la 2ª y 3ª filas la 1ª fila. Desarrollando finalmente por la primera columna:

$$|A| = m \cdot m \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & m-1 \\ 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 \cdot (m-1)^2$$

Si $|A| = 0 \Rightarrow m^2(m-1)^2 = 0$, con soluciones dobles $m = 0$ y $m = 1$. El rango de A es menor de 3 si $m = 0$ y $m = 1$.

b) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$ y la ampliada es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ m & m^2 & m^2 & | & 1 \\ m & m & m^2 & | & 1 \end{pmatrix}$

- Si $m = 0$ la matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$ siendo $\text{rg}(A) = 1$

y $\text{rg}(A^*) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. El Teorema de Rouché-Frobenius nos dice que el sistema es incompatible y no tiene solución.

- Si $m = 1$ la matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la ampliada es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$ siendo $\text{rg}(A) =$

$\text{rg}(A^*) = 1$. El Teorema de Rouché-Frobenius nos dice que el sistema es compatible indeterminado con infinitas soluciones. Como el rango es uno hay una única ecuación:
 $x + y + z = 1$.

Parametrizamos tomando $y = \lambda$, $z = \mu$, y obtenemos como soluciones:
 $(1-\lambda-\mu, \lambda, \mu)$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3.- [2,5 puntos] Se considera la recta r definida por $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\lambda-2 \end{cases}$ y la recta s definida por $\begin{cases} x=\mu \\ y=\mu-1 \\ z=-1 \end{cases}$. Halla la ecuación de

la recta perpendicular común a r y s .

Solución:

Vamos a resolverlo calculando los puntos de intersección P y Q de la recta t con las rectas r y s .

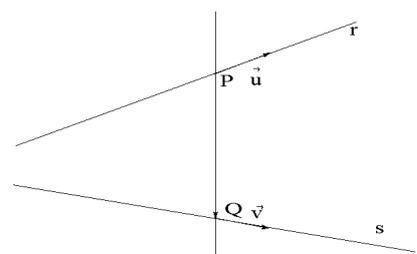
La recta r pasa por el punto $A = (1, 1, -2)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (0, 0, 1)$, luego un punto genérico de r es $P = (1, 1, \lambda-2)$.

La recta s pasa por el punto $B = (0, -1, -1)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (1, 1, 0)$, luego un punto genérico de s es $Q = (\mu, \mu-1, -1)$.

Formamos el vector $\vec{PQ} = (\mu-1, \mu-2, -\lambda+1)$ y le obligamos a que sea perpendicular a los vectores \vec{u} y \vec{v} , es decir que su producto escalar con ambos sea nulo:

$$\vec{PQ} \cdot \vec{u} = 0 = (\mu-1, \mu-2, -\lambda+1) \cdot (0, 0, 1) = -\lambda+1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ y el punto es } P = (1, 1, -1)$$

$$\vec{PQ} \cdot \vec{v} = 0 = (\mu-1, \mu-2, -\lambda+1) \cdot (1, 1, 0) = \mu-1 + \mu-2 = 2\mu-3 = 0 \Rightarrow \mu = \frac{3}{2} \text{ y el punto es } Q = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -1\right)$$



La recta pedida es la que pasa por $P = (1, 1, -1)$ y tiene como vector director $\vec{PQ} = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right)$, uno proporcional es $(1, -1, 0)$.

La ecuación de la recta perpendicular a ambas pedida en paramétricas es

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = 1 \end{cases} \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 4. Dada la recta r definida por $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$

a) [0,75 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r .

b) [0,75 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r .

c) [1 punto] Dados los puntos $A = (2, 1, 1)$ y $B = (0, 0, 1)$, halla los puntos C en el eje OX tales que el área del triángulo de vértices A, B y C es 2.

Solución:

a) A partir de la ecuación de la recta observamos que pasa por el punto $A = (1, -1, 2)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (2, 3, 1)$.

Para hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a r , consideramos el punto $O = (0, 0, 0)$ y los vectores directores $\vec{OA} = (1, -1, 2)$ y $\vec{u} = (2, 3, 1)$.

El plano pedido es:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 7x - 3y + (-5)z = 7x - 3y - 5z = 0$$

b) Para hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular a r consideramos su vector característico \vec{n} que coincide con el vector director de la recta $\vec{u} = (2, 3, 1)$. Su ecuación será:

$$2x + 3y + z + K = 0$$

Obligamos a que pase por el origen $O=(0,0,0)$ y tenemos que:

$$0+0+0+K = 0 \Rightarrow K = 0$$

El plano pedido es:

$$\boxed{\pi \equiv 2x + 3y + z = 0}$$

c) Como el punto C está en el eje OX , es de la forma $C = (a, 0, 0)$. Sabemos que el área de un triángulo es $\frac{1}{2}$ del módulo del producto vectorial de dos vectores con origen común, es decir:

$$\vec{AB} = (-2, -1, 0)$$

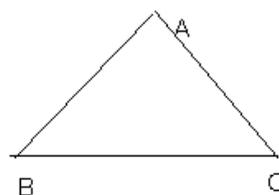
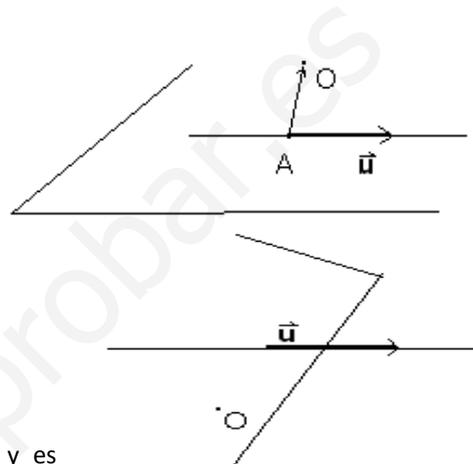
$$\vec{AC} = (a-2, -1, -1)$$

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 0 \\ a-2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + (-2)^2 + a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{5+a^2}$$

Según el enunciado del problema:

$$\frac{1}{2} \sqrt{5+a^2} = 2 \Rightarrow \sqrt{5+a^2} = 4 \Rightarrow 5+a^2 = 16 \Rightarrow a^2 = 11 \Rightarrow a = \pm \sqrt{11}$$

Los posibles puntos solución son: $C_1 = (\sqrt{11}, 0, 0)$ y $C_2 = (-\sqrt{11}, 0, 0)$



Opción B

1.- Se sabe que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es -3 . Calcula, indicando las propiedades que

utilices, los siguientes determinantes:

a) [1 punto] $\det(-2A)$ y $\det(A^{-1})$.

b) [1,5 puntos] $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} + a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} + a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} + a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

Solución:

a) Como $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$ tenemos que:

$$|-2A| = (-2)^3 \cdot |A| = -8 \cdot 3 = -24$$

Como el producto de una matriz por su inversa es la identidad $A^{-1} \cdot A = I$ y el determinante de un producto es el producto de determinantes $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ tenemos que:

$$|I| = |A^{-1}| \cdot |A| \Rightarrow 1 = |A^{-1}| \cdot |A| \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

b) Utilizando las propiedades:

- Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante
- Si intercambiamos entre si dos filas (columnas) de un determinante el determinante cambia de signo.

Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -14 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -14 \cdot 3 = -42$$

Utilizando las propiedades:

- Si una fila (columna) un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes colocando en dicha fila (columna) el primer y segundo sumando respectivamente.
- Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante
- Si un determinante tiene dos filas proporcionales, dicho determinante vale 0.
- El determinante de una matriz es igual al determinante de su matriz traspuesta.

Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} + a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} + a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} + a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & 5a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + 0 = 5 \cdot (-3) = -15$$

2.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$$

a) [1,5 puntos] Discútelo según los valores del parámetro a .

b) [1 punto] Resuelve el caso $a = 2$.

Solución:

a) La matriz del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $|A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -(a-2)(a-1)$$

Resolvemos $|A| = 0$, es decir $(a-2)(a-1) = 0$, de donde $a = 1$ y $a = 2$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, tenemos $|A| \neq 0$ con lo cual $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$, y por el teorema de Rouché el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

- Si $a = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A^*) = 3$

Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, por el teorema de Rouché el sistema es incompatible y no tiene solución.

- Si $a = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, porque dos columnas son iguales, tenemos $\text{rango}(A^*) = 2$

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, por el teorema de Rouché el sistema es compatible e indeterminado.

b) Como vimos en el apartado anterior es un sistema compatible indeterminado. Tenemos dos ecuaciones (las dos primeras, con las que hemos calculado el rango de A) y dos incógnitas principales.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + y + 2z &= 2. \end{aligned}$$

Tomamos $z = \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x + y &= 1 - \lambda \\ 2x + y &= 2 - 2\lambda \end{aligned}$$

Restamos ambas ecuaciones y tenemos

$$x = 1 - \lambda$$

Sustituyendo en $x + y + z = 1$, nos resulta:

$$y = 0.$$

La solución del sistema es:

$$(x, y, z) = (1 - \lambda, 0, \lambda) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

3.- Sea la recta s dada por $\begin{cases} x - z = -1 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$

a) [1,25 puntos] Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a la recta s y contiene a la recta r , dada por $x - 1 = -y + 2 = z - 3$

b) [1,25 puntos] Estudia la posición relativa de la recta s y el plano π_2 , de ecuación $x + y = 3$, y deduce la distancia entre ambos.

Solución:

a) La recta s de ecuación $\begin{cases} x - z = -1 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$, viene dada como intersección de dos planos. Vamos a obtener un

punto y un vector director suyos.

Para el punto tomamos $y = 0$, de donde $z = 3$ y $x = 2$. Punto $A(2,0,3)$

El vector director lo vamos a dar como el producto vectorial de los vectores normales de cada plano.

$$\vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 1\vec{j} + 2\vec{k} = (2, -1, 2)$$

La recta r , dada por $x - 1 = -y + 2 = z - 3$ la ponemos en forma continua (Observa que la y va multiplicada por -1). Su ecuación en forma continua es $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$, por tanto un punto suyo es $B = (1, 2, 3)$ y un vector

director es $\vec{d}_r = (1, -1, 1)$.

Como me piden un plano π_1 que sea paralelo a la recta s y que contenga a la recta r , tomamos para el plano el punto B de la recta r y los vectores \vec{d}_r y \vec{d}_s

Las ecuaciones paramétricas del plano serían

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 - \lambda - \mu \\ z = 3 + \lambda + 2\mu \end{cases} \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

El plano en forma general sería

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (x-1)(1) - (y-2)(0) + (z-3)(1) = -x + z - 2 = 0$$

b) Para estudiar la posición relativa de la recta s y el plano $\pi_2 \equiv x + y = 3$, ponemos la recta en paramétricas la sustituimos en el plano y resolvemos la ecuación que nos salga.

Con el punto $A(2,0,3)$ y el vector director $\vec{d}_s = (2, -1, 2)$ las ecuaciones paramétricas de la recta s son:

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 0 - \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

Sustituyendo en el plano π_2 nos queda

$$(2 + 2\lambda) + (0 - \lambda) = 3, \text{ de donde } \lambda = 1$$

Por lo tanto la recta s corta al plano π_2 en el punto $C(2 + 2(1), -1, 3 + 2(1)) = C(4, -1, 5)$.

Como la recta corta al plano la distancia de la recta al plano es nula.

4.- Sean los vectores $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (1, 0, -1)$ y $\vec{w} = (\lambda, 1, 0)$.

a) [0,75 puntos] Calcula los valores λ que hacen que \vec{u} y \vec{w} sean ortogonales.

b) [0,75 puntos] Calcula los valores λ que hacen que \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} sean linealmente independientes.

c) [1 punto] Para $\lambda = 1$ escribe el vector $\vec{r} = (3, 0, 2)$ como combinación lineal de \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} .

Solución:

a) Si los vectores \vec{u} y \vec{v} son ortogonales su producto escalar es nulo:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda - 1 + 0 = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$$

b) Los vectores son linealmente independientes si el rango de la matriz formada por sus coordenadas es 3, es decir si $|\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda(1-0) - 1(-1-3) + 0 = \lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -4$$

Luego si $\lambda \neq -4$, los vectores son linealmente independientes.

c) Si nos fijamos no hay que efectuar ningún desarrollo porque al sumar los tres vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} , obtenemos el vector \vec{r} .

Sabemos que el vector \vec{r} es combinación lineal de los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} si existen números reales a, b y c, no todos nulos tales que $\vec{r} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w}$, es decir:

$$(3,0,2) = a \cdot (1,-1,3) + b \cdot (1,0,-1) + c \cdot (1,1,0) = (a,-a,3a) + (b,0,-b) + (c,c,0) = (a+b+c,-a+c,3a-b).$$

Igualando miembro a miembro tenemos el sistema

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ -a+c=0 \\ 3a-b=2 \end{cases}$$

Despejando b y c en función de a en la 2ª y 3ª ecuaciones obtenemos:

$$\begin{cases} c = a \\ b = 3a - 2 \end{cases}$$

Que sustituimos en la 1ª ecuación

$$a + 3a - 2 + a = 3 \Rightarrow 5a = 5 \Rightarrow a = 1$$

Sustituyendo valores en la expresión de b y c:

$$c = 1$$

$$b = 3 - 2 = 1$$

Luego queda que:

$$\vec{r} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

Apellidos: _____ Nombre: _____

Curso: 2º Grupo: A Día: _____

CURSO 2015-16



Instrucciones:

a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS.
 b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**
 c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara.
 d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

Opción A

Ejercicio 1.- Sabiendo que el determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$ es 4, calcula los siguientes determinantes indicando, en cada

caso, las propiedades que utilizas:

a) [1 punto] $\det(-2A)$ y $\det(A^{-1})$.

b) [1,5 puntos]
$$\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix} \vee \begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix}$$

Ejercicio 2.- Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

a) [0,75 puntos] Halla A^{-1} .

b) [1,25 puntos] Calcula la matriz X que satisface $AX = B^t C$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

c) [0,5 puntos] Halla el determinante de $A^{2013} B^t C (A^{-1})^{2013}$.

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Calcula la distancia entre las rectas

$$r \equiv x = y = z \text{ y } s \equiv x - 1 = y - 2 = z - 3.$$

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Considera las rectas

$$r \equiv x = y = z, s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ y } t \equiv \begin{cases} 1 + 2\lambda \\ 3\lambda \\ -1 + \lambda \end{cases}$$

Halla la recta que corta a r y a s y es paralela a t .

Opción B

Ejercicio 1.- Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) [1 punto] ¿Para qué valores del parámetro k no existe la inversa de la matriz A ? Justifica la respuesta.

(b) [1'5 puntos] Para $k = 0$, resuelve la ecuación matricial $(X + I) \cdot A = A^t$, donde I es la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A .

Ejercicio 2.- Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = \lambda + 1 \\ 3y + 2z = 2\lambda + 3 \\ 3x + (\lambda - 1)y + z = \lambda \end{cases}$$

(a) [1 punto] Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

(b) [1 punto] Halla los valores de λ para los que el sistema tiene una única solución.

(c) [0'5 puntos] ¿Existe algún valor de λ para el que el sistema admite la solución $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$?

Ejercicio 3.- Sean r y s las rectas dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 6 \\ x + z = 3 \end{cases} \text{ y } s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2}$$

(a) [1'25 puntos] Determina el punto de intersección de ambas rectas.

(b) [1'25 puntos] Calcula la ecuación general del plano que las contiene

Ejercicio 4.- De un paralelogramo $ABCD$ conocemos tres vértices consecutivos: $A(2; -1; 0)$; $B(-2; 1; 0)$ y $C(0; 1; 2)$.

(a) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.

(b) [0'75 puntos] Halla el área de dicho paralelogramo.

(c) [0'75 puntos] Calcula el vértice D .

SOLUCIÓN DE LA PRUEBA

Opción A

Ejercicio 1.- Sabiendo que el determinante de una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$ es 4, calcula los siguientes determinantes

indicando, en cada caso, las propiedades que utilizas:

a) [1 punto] $\det(-2A)$ y $\det(A^{-1})$.

b) [1,5 puntos] $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix}$

Solución:

a) Para calcular $|-2A|$ utilizamos la propiedad de que dada una matriz cuadrada de orden n $|kA| = k^n|A|$
 $|-2A| = (-2)^3|A| = (-2)^3 \cdot 4 = -8 \cdot 4 = -32$

Para calcular $|A^{-1}|$ utilizamos que el producto de una matriz por su inversa es la identidad, hallamos el determinante de la matriz identidad:

$$AA^{-1} = I \Rightarrow |AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = |I| = 1$$

despejando en dicha expresión:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$$

b) Aplicando la propiedad de que si una fila de un determinante está multiplicada por un número, podemos sacar factor común los números que multiplican la 2ª fila y columnas respectivamente:

$$\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 = -8$$

Aplicando la propiedad anterior y permutando después la 1ª y 2ª filas, utilizando la propiedad de que si permutamos entre si dos columnas de un determinante, el determinante cambia de signo:

$$\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1) \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 = -12$$

Ejercicio 2.- Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

a) [0,75 puntos] Halla A^{-1} .

b) [1,25 puntos] Calcula la matriz X que satisface $AX = B^tC$ (B^t es la matriz traspuesta de B).

c) [0,5 puntos] Halla el determinante de $A^{2013}B^tB(A^{-1})^{2013}$.

Solución:

a) Para hallar A^{-1} utilizamos la definición:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^t)$$

Siendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0+0+0) - (0+0+2) = -2$$

Obtenemos la matriz traspuesta:

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de los adjuntos de la traspuesta será:

$$\text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego la inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Como existe matriz inversa A^{-1} multiplicamos la ecuación por la izquierda por A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1}B^tC \Rightarrow X = A^{-1}B^tC$$

Sustituyendo valores obtenemos:

$$X = A^{-1}B^tC = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -1 & 14 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

c) El determinante pedido es:

$$|A^{2013} \cdot B^tB \cdot (A^{-1})^{2013}| = |A^{2013}| \cdot |B^tB| \cdot |(A^{-1})^{2013}| \quad [1]$$

Donde hemos aplicado que $|M \cdot N| = |M| \cdot |N|$

Hallamos primero B^tB y después su determinante:

$$B^tB = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|B^tB| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (8+0+0) - (0+4+4) = 0$$

Aplicamos luego a [1]:

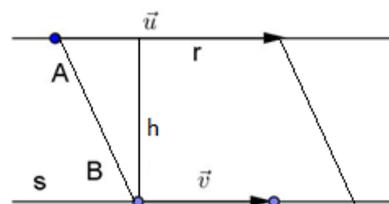
$$|A^{2013} \cdot B^tB \cdot (A^{-1})^{2013}| = |A^{2013}| \cdot 0 \cdot |(A^{-1})^{2013}| = 0$$

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Calcula la distancia entre las rectas

$$r \equiv x = y = z \text{ y } s \equiv x - 1 = y - 2 = z - 3.$$

Solución:

La recta r pasa por el punto $A = (0, 0, 0)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (1, 1, 1)$. La recta s pasa por el punto $B = (1, 2, 3)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (1, 1, 1)$. Por lo tanto ambas rectas son paralelas, luego calcularemos la distancia entre ellas como altura del paralelogramo formado por el vector \vec{u} , director de la recta r , el vector \vec{AB} que une los puntos de ambas rectas y los paralelos a ellos trazados por sus extremos.



$$d(r, s) = d(A, r) = \frac{|\vec{AB} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Restando las coordenadas de A y B obtenemos las del vector $\vec{AB} = (1, 2, 3)$

$$d(r, s) = \frac{\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right|}{|(1, 1, 1)|} = \frac{|(-1, 2, -1)|}{|(1, 1, 1)|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \text{ u.}$$

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Considera las rectas

$$r \equiv x = y = z, s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad y \quad t \equiv \begin{cases} 1 + 2\lambda \\ 3\lambda \\ -1 + \lambda \end{cases}$$

Halla la recta que corta a r y a s y es paralela a t.

Solución:

La recta r tiene como ecuación continua $\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1}$, luego un punto genérico de dicha recta es $R = (\lambda, \lambda, \lambda)$. La recta s tiene como ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = \mu \end{cases}$$

Un punto genérico de dicha recta es $S = (2, 1, \mu)$.

Como la recta pedida corta a ambas rectas su vector director es $\vec{RS} = (2-\lambda, 1-\lambda, \mu-\lambda)$. Como la recta pedida es paralela a la recta t, su vector director es paralelo al de ésta, $\vec{w} = (2, 3, 1)$. Por lo tanto \vec{RS} y \vec{w} son proporcionales:

$$\frac{2-\lambda}{2} = \frac{1-\lambda}{3} = \frac{\mu-\lambda}{1}$$

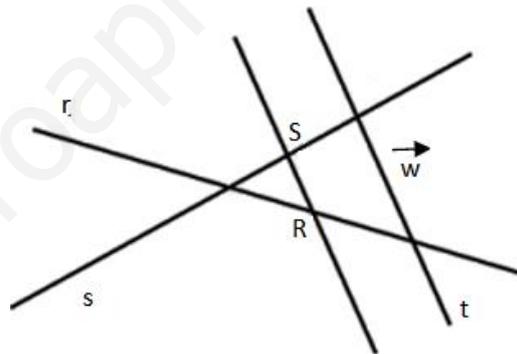
Dando lugar a las ecuaciones:

$$3(2-\lambda) = 2(1-\lambda) \Rightarrow 6-3\lambda = 2-2\lambda \Rightarrow 6-2 = 3\lambda-2\lambda \Rightarrow \lambda = 4$$

$$2-\lambda = 2(\mu-\lambda) \Rightarrow 2-4 = 2\mu-8 \Rightarrow 2\mu = 6 \Rightarrow \mu = 3$$

La recta pasa por el punto $R = (2, 2, 2)$ y tiene como vector director $\vec{w} = (2, 3, 1)$:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-2}{1}$$



Opción B

Ejercicio 1.- Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}.$$

a) [1 punto] ¿Para qué valores del parámetro k no existe la inversa de la matriz A? Justifica la respuesta.

b) [1,5 puntos] Para $k = 0$, resuelve la ecuación matricial $(X+I) \cdot A = A^t$, donde I denota la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) Para hallar qué valores del parámetro k hacen no exista matriz inversa calculamos el determinante, $|A|$ y obligamos a que sea nulo. Calculamos el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} = (0+0+2k) - (1+0+0) = 2k-1 \quad [1]$$

Si $|A| = 0 \Rightarrow 2k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$. Luego la matriz A no tiene inversa si $k = \frac{1}{2}$.

b) En el apartado anterior hemos averiguado que para $k = 0$ la matriz A tiene inversa, luego podemos multiplicar la ecuación por la derecha por la inversa de la matriz A y a continuación restar la matriz identidad en ambos miembros:

$$(X+I) \cdot A \cdot A^{-1} = A^t \cdot A^{-1} \Rightarrow (X+I) = A^t \cdot A^{-1} \Rightarrow X = A^t \cdot A^{-1} - I$$

Sustituyendo $k = 0$ en la expresión [1] del apartado anterior hallamos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuyo determinante es $|A| = 2 \cdot 0 - 1 = -1$

Como es no nulo exista la matriz inversa, A^{-1} , que calculamos su inversa aplicando la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^t)$$

Obtenemos la matriz traspuesta:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de los adjuntos de la traspuesta será:

$$\text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego la inversa de A es:

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación anterior:

$$X = A^t \cdot A^{-1} - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.- Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = \lambda + 1 \\ 3y + 2z = 2\lambda + 3 \\ 3x + (\lambda - 1)y + z = \lambda \end{cases}$$

a) [1 punto] Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

b) [1 punto] Halla los valores de λ para los que el sistema tiene una única solución.

c) [0,5 puntos] ¿Existe algún valor de λ para el que el sistema admite la solución $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$?

Solución:

a) Sustituimos valores y obtenemos la matriz del sistema y ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como los determinantes de orden 2 y 3 valen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3+6-0)-(9+0+0) = 0, \text{ rango}(A) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3+15+0) - (18+0+0) = 18-18 = 0, \text{ rango}(A^*) = 2$$

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < n^\circ$ incógnitas, por el teorema de Rouché el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones. Como el rango es 2, una de ellas es combinación lineal de las otras dos, sólo necesitamos 2 ecuaciones. Tomamos la 1ª y la 2ª siendo $z = \lambda$:

$$\begin{cases} x + y = 2 - \lambda \\ 3y = 5 - 2\lambda \end{cases}$$

En la 2ª ecuación queda: $y = \frac{5}{3} - \frac{2\lambda}{3}$

Sustituyendo en la 1ª ecuación: $x = 2 - \lambda - y = 2 - \lambda - \frac{5}{3} + \frac{2\lambda}{3} = \frac{1}{3} - \frac{\lambda}{3}$

La solución es:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{3} - \frac{\lambda}{3}, \frac{5}{3} - \frac{2\lambda}{3}, \lambda \right) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) Para halla los valores de λ para los que el sistema tiene una única solución consideramos la matriz de los coeficientes del sistema y la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 3 & 2 & 2\lambda+3 \\ 3 & \lambda-1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Para que haya solución única según el Teorema de Rouché-Frobenius el sistema ha de ser compatible y determinado, luego $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. Para ello basta con que el determinante de la matriz del sistema sea no nulo, $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & \lambda-1 & 1 \end{vmatrix} = (3+6-0)-(9+2\lambda-2+0) = -2\lambda+2$$

Luego el sistema tiene solución única si $\lambda \neq 1$.

c) Para ver si existe algún valor de λ para que el sistema admita la solución $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ debemos sustituir dichos

valores en las ecuaciones del sistema y ver si es cierto. Sustituimos:

$$-\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = \lambda + 1 \Rightarrow 0 = \lambda + 1 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 0 + 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2\lambda + 3 \Rightarrow 1 = 2\lambda + 3 \Rightarrow 2\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 + \frac{1}{2} = \lambda \Rightarrow -1 = \lambda$$

Luego el valor buscado es $\lambda = -1$

Ejercicio 3.- Sean r y s las rectas dadas por

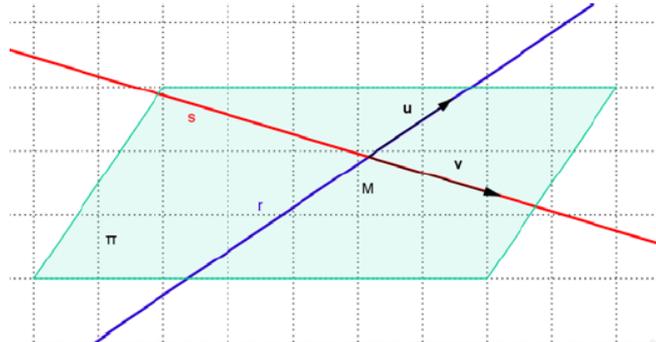
$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=6 \\ x+z=3 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2}$$

a) [1,25 puntos] Determina el punto de intersección de ambas rectas.

b) [1,25 puntos] Calcula la ecuación general del plano que las contiene.

Solución:

a) Para determinar el punto de intersección de ambas rectas en primer lugar ponemos las ecuaciones de ambas en paramétricas.



Para r tomamos $z = \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+y=6+\lambda \\ x=3-\lambda \end{cases}$$

Sustituyendo en la primera ecuación tenemos:

$$y = 6 + \lambda - (3 - \lambda) \Rightarrow y = 3 + 2\lambda.$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 3 + 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto es $A = (3, 3, 0)$ y un vector director es $\vec{u} = (-1, 2, 1)$.

En la recta s tomamos el punto $B = (1, -1, 0)$ y el vector director $\vec{v} = (-1, 6, 2)$.

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = -1 + 6\mu, \mu \in \mathbb{R} \\ z = 2\mu \end{cases}$$

Para determinar el punto de corte M , igualamos ambas rectas y resolvemos el sistema formado:

$$\begin{cases} 3 - \lambda = 1 - \mu \\ 3 + 2\lambda = -1 + 6\mu \\ \lambda = 2\mu \end{cases}$$

Sustituimos el valor obtenido de λ en la 3ª ecuación en la 1ª quedando:

$$3 - 2\mu = 1 - \mu \Rightarrow \mu = 2, \text{ luego } \lambda = 2\mu = 4$$

Comprobamos que verifica la 2ª ecuación:

$$3 + 2 \cdot 4 = -1 + 6 \cdot 2$$

Como es cierto, el punto de corte de las rectas es:

$$M = (3 - 4, 3 + 2 \cdot 4, 4) \Rightarrow M = (-1, 11, 4)$$

b) Calculamos la ecuación general del plano que contiene ambas rectas. Para ello necesitamos un punto, que será $M = (-1, 11, 4)$ y dos vectores linealmente independientes que serán los vectores directores de las rectas,

$\vec{u} = (-1, 2, 1)$ y $\vec{v} = (-1, 6, 2)$. Luego tiene de ecuación:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-11 & z-4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = (4-6)(x+1) - (-2+1)(y-11) + (-6+2)(z-4) = -2x + y - 4z + 3 = 0$$

El plano pedido es

$$\pi \equiv 2x - y + 4z - 3 = 0$$

Ejercicio 4.- De un paralelogramo $ABCD$ conocemos tres vértices consecutivos: $A = (2, -1, 0)$, $B = (-2, 1, 0)$ y $C = (0, 1, 2)$.

a) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.

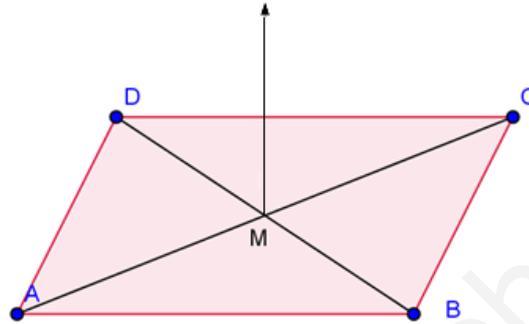
b) [0,75 puntos] Halla el área de dicho paralelogramo.

c) [0,75 puntos] Calcula el vértice D .

Solución:

a) Para calcular la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene hallamos el centro del paralelogramo, M , que sabemos que es el punto medio de dos vértices no consecutivos, por ejemplo A y C :

$$M = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = (1, 0, 1)$$



El vector director de la recta r es uno perpendicular al plano, por ejemplo el producto vectorial de los vectores $\vec{AB} = (-2-2, 1-(-1), 0-0) = (-4, 2, 0)$ y $\vec{AC} = (0-2, 1-(-1), 2-0) = (-2, 2, 2)$.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 8\vec{j} - 4\vec{k} = (4, 8, -4)$$

Tomamos uno paralelo a éste $\vec{u} = (4, 8, -4)$ y la ecuación de r en forma continua es:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

b) Sabemos que el área de un paralelogramo es el módulo del producto vectorial de dos vectores con origen común. Tomamos los vectores $\vec{AB} = (-4, 2, 0)$ y $\vec{AD} = (4-2, -1-(-1), 2-0) = (2, 0, 2)$, obtenemos:

$$|\vec{AB} \times \vec{AD}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k} = (4, 8, -4)$$

por lo tanto:

$$\text{Área} = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = \sqrt{4^2 + 8^2 + (-4)^2} = \sqrt{96} \text{ u}^2$$

c) Tomamos como coordenadas de $D = (x, y, z)$. Si $ABCD$ es un paralelogramo, los vectores $\vec{AB} = (-4, 2, 0)$ y $\vec{DC} = (0-x, 1-y, -2-z)$ tienen las mismas coordenadas, porque son iguales como representantes del mismo vector libre. Igualando coordenadas obtenemos:

$$0-x = -4 \Rightarrow x = 4$$

$$1-y = 2 \Rightarrow y = -1$$

$$2-z = 0 \Rightarrow z = 2.$$

El punto pedido es $D(4, -1, 2)$.