Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Sabiendo que es $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(3x)-e^x+ax}{x\cdot \text{sen}(x)}$ finito, calcula a y el valor del límite.

Ejercicio 2. Sea f: R → R la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+3x & \text{si} \quad x \le 2 \\ x^2-bx-4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) **[1,5 puntos]** Halla a y b sabiendo que f es derivable en R.
b) **[1 punto]** Determina la recta tangente y la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 3.

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Calcula $\int_0^{\pi/4}\dfrac{x}{\cos^2(x)}dx$ (Sugerencia: integración por partes).

Ejercicio 4.- Sea f: R → R la función definida por f(x) = x|x-2|
a) **[1 punto]** Estudia la derivabilidad de f en *x* = 2.
b) **[0,5 puntos]** Esboza la gráfica de f.
c) **[1 punto]** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Opción B

Ejercicio 1. Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{x^4+3}{x}$, para $x \neq 0$.
a) **[0.75 puntos]** Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de f.
b) **[1 punto]** Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f.
c) **[0.75 puntos]** Esboza la gráfica de f.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Determina una función f: R → R sabiendo que su derivada viene dada por $f'(x) = x^2 + x - 6$ y que el valor que alcanza f en su punto de máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto de mínimo (relativo).

Ejercicio 4.- Sea f: (-1, +∞) → R la función definida por *f(x)* = Ln(x + 1) (Ln denota la función logaritmo neperiano).
a) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa *x* = 0.
b) **[1,5 puntos]** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y la recta *x* = 1.

SOLUCIÓN DE LA PRUEBA

Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Sabiendo que es $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos(3x)-e^x+ax}{x\cdot \operatorname{sen}(x)}$ **finito, calcula a y el valor del límite.**

Solución:

Hallamos el límite de la expresión:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-e^x+ax}{x\cdot \operatorname{sen}(x)}=\frac{\cos(0)-e^0+a.0}{0\cdot \operatorname{sen}(0)}=\frac{1-1+0}{0}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Como ambas funciones f y g son continuas en el intervalo [a -δ, a + δ] y derivables en el intervalo (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y tales que $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$ podemos aplicar la regla de L'Hôpital, que dice que se verifica que $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-e^x+ax}{x\cdot \operatorname{sen}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-3.\operatorname{sen}(3x)-e^x+a}{\operatorname{sen}(x)+x\cdot\cos(x)}=\frac{-3.0-e^0+a}{0+0\cdot 1}=\frac{-1+a}{0}$$

Como según el enunciado el límite existe y es finito el numerador ha de ser nulo, para obtener una indeterminación $\left(\frac{0}{0}\right)$ y poder volver a aplicar la regla de L'Hôpital, por lo tanto -1 + a = 0 ⇒ **a = 1**.

Volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital, con a = 1, obteniendo el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3.\operatorname{sen}(3x)-e^x+1}{\operatorname{sen}(x)+x\cdot\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-9.\cos(3x)-e^x}{\cos(x)+\cos(x)-x.\operatorname{sen}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-9.\cos(3x)-e^x}{2\cos(x)-x.\operatorname{sen}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-9.\cos(0)-e^x}{2\cos(0)-0.\operatorname{sen}(0)}=$$

$$=\frac{-9.1-e^0}{2.1-0\cdot 1}=\frac{-9-1}{2}=-5$$

Ejercicio 2. Sea f: R → R la función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & \text{si } x\le 2\\ x^2-bx-4 & \text{si } x>2\end{cases}$$

a) **[1,5 puntos]** Halla a y b sabiendo que f es derivable en R.

b) **[1 punto]** Determina la recta tangente y la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 3.

Solución:

a) Si la función es derivable ha de ser continua. Como la rama de la izquierda es una polinómica de segundo grado, es por lo tanto continua y derivable en todo R, en particular en x < 2. La rama de la derecha es una polinómica de segundo grado, por lo tanto continua y derivable en todo R, en particular en x > 2

Obliguemos a que sea continua en x = 2:

$f(2)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(ax^2+3x)=4a+6$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2-bx-4)=-2b$

Igualando ambas expresiones obtenemos la ecuación

4a + 6 = - 2b [1]

Obliguemos a que sea derivable en x = 2:

$$f'(2^-)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(ax^2+3x)-(4a+6)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{a(x^2-4)+3(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)[a(x+2)+3]}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2^-}[a(x+2)+3]=4a+3$$

$f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\dfrac{(x^2-bx-4)-(4a+6)}{x-2}$

Utilizando la expresión [1]:

$f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+}\dfrac{(x^2-bx-4)+2b}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\dfrac{(x^2-4)-b(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)[(x+2)+b]}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}[(x+2)+b] = 4-b$

Igualando ambas expresiones obtenemos la ecuación

4a + 3 = 4 -b [2]

Como $f'(2^+) \neq f'(2^-)$, f(x) no es derivable en x = 2, por lo cual es derivable en R-{2}

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 4a+6=-2b \\ 4a+3=4-b \end{cases}$, obtenemos a = 2 y b = -7, por tanto la función pedida es

$f(x) = \begin{cases} 2x^2+3x & \text{si } x\le 2 \\ x^2-7x-4 & \text{si } x>2 \end{cases}$

b) Como nos piden la recta tangente y normal en x = 3, tomamos la rama de la función con x > 2, es decir

$f(x) = x^2 + 7x-4$

La recta tangente en x = 3 es:

y-f(3) = f'(3)(x-3)

La recta normal en x = 3 es:

y- f(3) = (-1/f'(3)).(x-3)

Tomaos valores:

$(x) = x^2 + 7x - 4 \Rightarrow f(3) = 9 + 21 - 4 = 26$

$f'(x) = 2x + 7 \Rightarrow f'(3) = 6 + 7 = 13$

La recta tangente en x = 3 es:

$\boxed{y - 26 = 13(x - 3)}$

La recta normal en x = 3 es:

$\boxed{y - 26 = (-1/13).(x - 3)}$

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Calcula $\int_0^{\pi/4}\dfrac{x}{\cos^2(x)}dx$ (Sugerencia: integración por partes).

Solución:

Resolvemos primero la integral indefinida $I = \int\dfrac{x}{\cos^2(x)}dx$ que realizamos por partes siendo:

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \dfrac{dx}{\cos^2(x)} \Rightarrow v = tgx$

$I = x.tg\,x - \int tg\,x.dx = x.tg\,x - \int\dfrac{sen\,x}{\cos x}.dx = x.\,tg\,x-[-\ln(\cos x)] = x.\,tg\,x + \ln(\cos x)$

Luego aplicamos la regla de Barrow:

$\int_0^{\pi/4}\dfrac{x}{\cos^2(x)}dx = [x.\,tg\,x+\ln(\cos x)]_0^{\pi/4} = \left[\dfrac{\pi}{4}.\,tg\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\ln\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\right)\right] - [0.\,tg(0)+\ln(\cos 0)] =$

$= \left[\dfrac{\pi}{4}+\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] - [0+\ln(1)] = \dfrac{\pi}{4}+\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ejercicio 4.- Sea f: R → R la función definida por f(x) = x|x-2|

a) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f en $x = 2$.
b) [0,5 puntos] Esboza la gráfica de f.
c) [1 punto] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución
a) Para estudiar la derivabilidad de f en $x = 2$, antes debemos considerar la continuidad de la función en dicho punto. Para ello redefinimos la función como función a trozos.

$$x|x-2| = \begin{cases} -x^2+2x & \text{si } x<2 \\ x^2-2x & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

La rama de la izquierda es una polinómica de segundo grado, por lo tanto continua y derivable en todo R, en particular en $x < 2$
La rama de la derecha es una polinómica de segundo grado, por lo tanto continua y derivable en todo R, en particular en $x > 2$

Veamos la continuidad de f(x) en x = 2:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (-x^2+2x) = 0$$

$$f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2-2x) = 0$$

Al ser dichos valores iguales, la función f(x) es continua en x = 2, y por tanto en todo R .

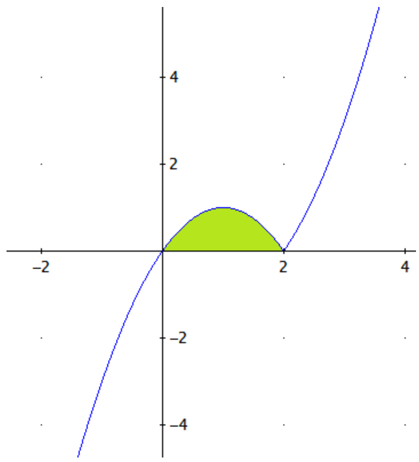
Estudiemos la derivabilidad en x = 2, es decir si son iguales las derivadas laterales:

$$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-x^2+2x-0}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} (-x) = -2$$

$$f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-2x-0}{x-2} = \lim_{x\to 2+} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+} x = 2$$

Como $f'(2^+) \neq f'(2^-)$, f(x) no es derivable en x = 2, por lo cual es derivable en R-{2}

b) Para calcular el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas representamos dicha gráfica teniendo en cuenta que la rama de la izquierda es una parábola cóncava cuyo vértice es la solución de f'(x) = 0:
$f'(x) = -2x+2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ cuya ordenada es: $-1^2 - 2(-1) = 1$ es decir V = (1, 1)



La rama de la derecha es una parábola convexa cuyo vértice es la solución de f'(x) = 0:
$f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ cuya ordenada es: $1^2 - 2(1) = -1$
es decir V = (1, -1) que no pertenece al dominio.

Obtenemos la gráfica de la figura adjunta.
c) El área que nos piden es

$$A = \int_0^2 (-x^2+2x)dx = \left[\frac{-x^3}{3}+x^2\right]_0^2 = \left(\frac{-8}{3}+4\right) - 0 = \frac{4}{3} u^2$$

Opción B

Ejercicio 1. Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{x^4+3}{x}$, para $x \neq 0$.

(a) [0,75 puntos] Halla los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de f.
(b) [1 punto] Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f.
(c) [0,75 puntos] Esboza la gráfica de f.

Solución
a1) Cortes con los ejes.
- Corte con el eje OY: No tiene porque no está definida la función para $x \neq 0$.

Corte con el eje OX: $\dfrac{x^4+3}{x} = 0 \Rightarrow x^4+3 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[4]{-3}$ que no tiene *Solución* real.
- Luego la función no tiene cortes con los ejes.

a2) Asíntotas.
- Asíntota vertical: x = 0 puesto que:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^4+3}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^4+3}{x} = -\infty$$

- Asíntota horizontal: No tiene puesto que

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^4+3}{x} = +\infty$$

- Asíntota oblicua: No tiene puesto que

$$\lim_{x\to \infty} \frac{(x^4+3)/x}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^4+3}{x^2} = +\infty$$

Por lo tanto presenta una rama parabólica.

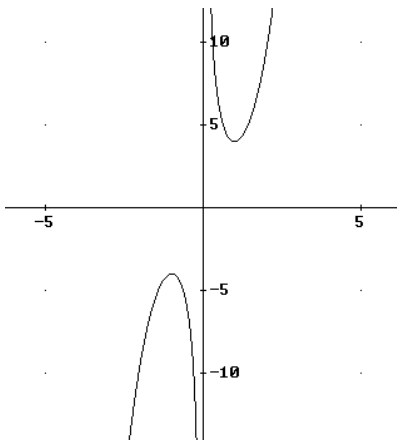
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos
Para calcularlos hallamos la primera derivada de la función.

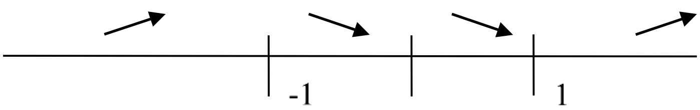
$$f'(x) = \frac{4x^3.x-(x^4+3)}{x^2} = \frac{3(x^4-1)}{x^2}$$

que se anula en:
$3(x^4-1) = 0 \Rightarrow x^4-1 = 0 \Rightarrow x^4 = 1$

con soluciones $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$

Luego se establecen las regiones: $(-\infty, -1)$, $(-1,0)$, $(0, 1)$ y $(1,\infty)$.
Tomando valores en la derivada en cada una de las regiones obtenemos que:





- f es creciente en $(-\infty, -1)\cup(1,\infty)$.
- f es decreciente en $(-1,0) \cup (0, 1)$

Por lo tanto deducimos que la función tiene:
- Un máximo relativo en (-1, -4)
- Un mínimo relativo en (1, 4).

c) Un esbozo de la gráfica es el de la figura adjunta:
Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

Solución:
Es un problema de optimización. Consideramos que x e y son los dos números pedidos. Por el enunciado del problema debemos optimizar:
$P(x, y) = x^2.y^2$ [1]

Sujeta a la relación:
$x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$

Sustituyendo en [1]:
$P(x)\ x^2.(10-x)^2 = x^2.(100-20x+x^2) = x^4-20x^3+100x^2$.

Para maximizarlo hallamos su primera derivada P'(x):
$P'(x) = 4x^3 - 60x^2 + 200x$.

y resolvemos P'(x) = 0 que serán los posibles máximos o mínimos.

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3-60x^2+200x = 0 = x(4x^2-60x+200) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 60x + 200 = 0 \end{cases}$$

x = 0 con solución x = 0.
$4x^2-60x+200 = 0 \Rightarrow x^2-15x+50 = 0$ con soluciones x = 10 y x = 5.

Luego los posibles máximos o mínimos son $x_0 = 0$, $x_1 = 5$ y $x_2 = 10$.

Hallemos P''(x) y comprobemos dichos valores para averiguar si es máximo o mínimo:
$P''(x) = 12x^2-120x+200$
- Como P''(0) = 200 > 0, x = 0 es un mínimo relativo.
- Como P''(10) = 200 > 0, x = 10 es un mínimo relativo.
- Como P''(5) = – 100 < 0, x = 5 es un máximo relativo.

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Determina una función f: R $\to$ R sabiendo que su derivada viene dada por *f'(x) = x^2 + x*-6 y que el valor que alcanza f en su punto de máximo (relativo) es el triple del valor que alcanza en su punto de mínimo (relativo).

Solución:
Vamos a determinar en primer la integral de f'(x) que es f(x):

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (x^2 + x - 6)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + C$$

Los extremos, máximos o mínimos relativos se alcanzan en los valores que anulan la derivada:

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$ con soluciones $x_1 = -3$ y $x_2 = 2$

Para comprobar si son máximos o mínimos hallamos la 2ª derivada y comprobamos su valor:
$f''(x) = 2x+1$
- Como f '(-3) = 0 y f ''(-3) = -5 < 0, x_1 =-3 es un máximo relativo
- Como f '(2) = 0 y f ''(2) = 5 > 0, x_2 = 2 es un mínimo relativo

Sustituimos los valores en la integral f(x):

$$f(-3) = \frac{(-3)^3}{3} + \frac{(-3)^2}{2} - 6(-3) + C = 9 + \frac{9}{2} + C = \frac{27}{2} + C$$

$$f(2) = \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - 6.2 + C = \frac{8}{3} - 10 + C = -\frac{22}{3} + C$$

Aplicamos el enunciado del problema de que el valor que alcanza f en su punto de máximo relativo es el triple del valor que alcanza en su punto de mínimo relativo:

$$f(-3) = 3f(2) \Rightarrow \frac{27}{2} + C = 3\left(-\frac{22}{3} + C\right) \Rightarrow \frac{27}{2} + C = -22+3C \Rightarrow 27+2C = -44+6C \Rightarrow 71 = 4C \Rightarrow C = \frac{71}{4}$$

Luego la función pedida es: $\boxed{f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + \frac{71}{4}}$

Ejercicio 4.- Sea f: (-1, +∞) → R la función definida por *f(x)* = Ln(x + 1) (Ln denota logaritmo neperiano).
a) [1 punto] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa *x* = 0.
b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y la recta *x* = 1.

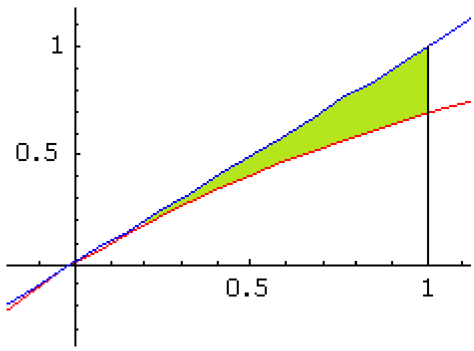
Solución

a) La recta tangente en x = 0 en forma punto-pendiente es:
$y-f(0) = f'(0)(x-0)$
Tomamos valores en la función y la derivada:
$f(x) = Ln(x+1) \Rightarrow f(0) = Ln(0+1) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$$

Sustituyendo valores:
$y-0 = 1(x-0) \Rightarrow y = x$
que es la bisectriz del I y III cuadrante.

b) La gráfica de Ln(x + 1) es exactamente igual que la de Ln(x) pero desplazada una unidad a la izquierda en el eje de abscisas OX. Un esbozo del recinto pedido es el de la figura adjunta donde observamos la recta tangente está por encima de la gráfica de la función:



Vamos ya a calcular el área que nos piden

$$A = \int_0^1 [x - Ln(x+1)]dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 Ln(x+1)dx$$

La primera es una integral inmediata y la segunda es una por partes, de la cual hallaremos una primitiva

$$I_1 = \int Ln(x+1)dx$$

$u = Ln(x+1) \Rightarrow du = \frac{dx}{x+1}$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

$$I_1 = xLn(x+1) - \int \frac{xdx}{x+1}$$

Como la integral obtenida es racional donde numerador y denominador tiene el mismo grado sumamos y restamos 1 en el numerador:

$$I_1 = xLn(x+1) - \int \frac{xdx}{x+1} = xLn(x+1) - \int \frac{x+1-1dx}{x+1} = xLn(x+1) - \int dx + \int \frac{dx}{x+1} = x.Ln(x+1)-x+Ln(x+1)$$

Luego el valor del área es:

$$A = \left[\frac{x^2}{2} - x.Ln(x+1) + x - Ln(x+1)\right]_0^1 = \left[\frac{1}{2} - 1.Ln(2) + 1 + Ln(2)\right] - \left[\frac{0}{2} - 0.Ln(1) + 0 + Ln(1)\right] = \frac{3}{2} + 2.Ln(2)\ u^2$$

EXAMEN DE MATEMATICAS II 2ª ENSAYO (ANÁLISIS)

Apellidos: ___________________________ Nombre: ________________

Curso: 2º Grupo:__Día:_________ CURSO 2015-16

Instrucciones:	a) Duración: 1 HORA y 30 MINUTOS. b) Debes elegir entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o bien únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B** c) Contesta de forma razonada, escribe ordenadamente y con letra clara. d) Puedes usar calculadora (puede ser programable o tener pantalla gráfica).

Opción A

Ejercicio 1.- [**2,5 puntos**] Sabiendo que $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln x}\right)$ es finito, calcula a y el valor del límite. (ln denota el logaritmo neperiano).

Ejercicio 2.- Sea f: R → R definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

a) [1,75 puntos] Halla a, b y c para que la gráfica de f tenga tiene un punto de inflexión de abscisa $x = \frac{1}{2}$ y que la recta tangente en el punto de abscisa x = 0 tenga de ecuación y = 5-6x.

b) [0,75 puntos] Para a = 3, b = -9 y c = 8, calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Calcula $\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2-2x-4}dx$

Ejercicio 4.- Sean f: R → R y g: R → R las funciones definidas por $f(x) = \frac{|x|}{2}$ y $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

a) [1 puntos] Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ellas.

b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Opción B

Ejercicio 1.- Considera la función derivable f: R → R definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} & \text{si } x<0 \\ ax+b & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

a) [1,75 puntos] Calcula a y b.

b) [0,75 punto] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = -1.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] De entre todos los número reales positivos, determina el que sumado con su inverso da suma mínima.

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Sea la función definida por $f(x) = x\cdot\ln(x + 1)$ para $x > -1$ (ln denota el logaritmo neperiano). Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1, 0).

Ejercicio 4.- Considera el recinto limitado por las siguientes curvas

$y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $y = 4$

a) [1 punto] Haz un esbozo del recinto y calcula los puntos de corte de las curvas.

b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto.

SOLUCIÓN DE LA PRUEBA

Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{a}{\ln x}\right)$ es finito, calcula a y el valor del límite. (ln denota el logaritmo neperiano).

Solución:
Reducimos a común denominador la expresión:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x.\ln x - a(x-1)}{(x-1).\ln x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Como ambas funciones f y g son continuas en el intervalo [a -δ, a + δ] y derivables en el intervalo (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y tales que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$ podemos aplicar la regla de L'Hôpital, que dice que se verifica que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x.\ln x - a(x-1)}{(x-1).\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{1.\ln x + x.\frac{1}{x} - a}{1.\ln x + (x-1).\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + 1 - a}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \frac{1-a}{0}$$

Como según dice el enunciado el límite existe y es finito el numerador ha de ser cero, para poder seguir aplicando la regla de L'Hôpital, es decir 1 - a = 0, de donde a = 1. Volviendo a aplicar la regla de L'Hôpital, con a = 1, tenemos que el límite es:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{x-(x-1)}{x^2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 2.- Sea f: R → R definida por f(x) = $x^3 + ax^2 + bx + c$.
a) [1,75 puntos] Halla a, b y c para que la gráfica de f tenga tiene un punto de inflexión de abscisa x = $\frac{1}{2}$ y que la recta tangente en el punto de abscisa x = 0 tenga de ecuación y = 5-6x.
b) [0,75 puntos] Para a = 3, b = -9 y c = 8, calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

Solución:
a) La función f(x) = $x^3 + ax^2 + bx + c$ es polinómica por lo tanto es continua, derivable e integrable en R. Hallemos la primera y segunda derivadas que serán necesarias a continuación.
f'(x) = $3x^2 + 2ax + b$
f''(x) = 6x + 2a

- Como tiene un punto de inflexión en $x = \frac{1}{2} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 6.\frac{1}{2} + 2a = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$
- Si en x = 0 la recta tangente es y = f(x) = 5-6x, luego tenemos que f(0) = 5 ⇒ c = 5.
- Como la pendiente de la recta tangente anterior (y' = -6) coincide con f'(0) obtenemos:
  f'(0) = b = -6

La función pedida es **f(x) = $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 5$**.

b) Tomando a = 3, b = -9 y c = 8 la función es f(x) = $x^3 + 3x^2 - 9x + 8$.
Los extremos relativos los estudiamos a partir de su primera derivada f'(x).
f'(x) = $3x^2+6x- 9$.

Si f'(x) = 0 $\Rightarrow$ $3x^2+6x-9 = 0 \Rightarrow x^2+2x-3 = 0$ con soluciones $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$ que serán los posibles extremos relativos.

Calculemos la segunda derivada para averiguar su carácter.
$f''(x) = 6x+6$

Como $f''(-3) = 6.(-3)+6 = -12 < 0$, en x = -3 hay un máximo relativo de valor $f(-3) = (-3)^3+3(-3)^2-9(-3)+8=35$.
Como $f''(1) = 6.(1)+6 = 12 > 0$, en x = 1 hay un mínimo relativo de valor $f(1) = (1)^3+3(1)^2-9(1)+8=3$.

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Calcula $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2-2x-4}dx$

Solución:
Determinamos primero la integral indefinida asociada:

$$I = \int \frac{x^2}{2x^2-2x-4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2-x-2}dx$$

Como es una integral racional de igual grado numerador y denominador debemos realizar la división:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & x^2-x-2 \\ \cline{2-2} -x^2+x+2 & 1 \\ \cline{1-1} \quad x+2 & \end{array}$$

Aplicando que $\dfrac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \dfrac{r(x)}{d(x)}$:

$$\int \frac{x^2}{x^2-x-2}dx = \int\left(1+\frac{x+2}{x^2-x-2}\right)dx = \int dx + \int \frac{x+2}{x^2-x-2}.dx = x + \int \frac{x+2}{x^2-x-2}.dx$$

$\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-x-2}.dx$ es una integral racional y descomponemos el denominador en producto de factores:
$x^2-x-2 = 0 \Rightarrow x = -1$ y $x = 2$.

$$I_1 = \int \frac{x+2}{(x+1).(x-2)}.dx = \int\left[\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}\right]dx$$

Igualando valores queda:

$$\frac{x+2}{(x+1).(x-2)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2} \Rightarrow x+2 = A(x-2)+B(x+1)$$

Calculamos las constantes A y B:

Para $x = -1 \Rightarrow 1 = -3A \Rightarrow A = -\dfrac{1}{3}$

Para $x = 2 \Rightarrow 4 = 3B \Rightarrow B = \dfrac{4}{3}$

Por lo tanto:

$$I = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left[\int\frac{-1/3}{x+1}.dx+\int\frac{4/3}{x-2}.dx\right] = \frac{1}{2}x-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2} = \frac{x}{2}-\frac{1}{6}Ln|x+1|+\frac{2}{3}Ln|x-2|$$

La integral definida pedida es:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2-2x-4}dx = \left[\frac{x}{2}-\frac{1}{6}Ln|x+1|+\frac{2}{3}Ln|x-2|\right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{6}Ln(2)+\frac{2}{3}Ln(1)\right]-\left[0-\frac{1}{6}Ln(1)+\frac{2}{3}Ln(2)\right] = \frac{1}{2}-\frac{5}{6}Ln(2)$$

Ejercicio 4.- Sean f: R → R y g: R → R las funciones definidas por f(x) = $\frac{|x|}{2}$ y g(x) = $\frac{1}{1+x^2}$.

a) [1 puntos] Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Solución:

a) La gráfica del valor absoluto |x| = $\begin{cases} -x & \text{si} \quad x<0 \\ x & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$ está formada por dos semirrectas coincidentes con las bisectrices del primer y tercer cuadrante que se cortan en el origen. La gráfica de f(x) = $\frac{|x|}{2}$ = $\begin{cases} -x/2 & \text{si} \quad x<0 \\ x/2 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$ es similar aunque con menor pendiente, por lo tanto es continua en R por ser ambas ramas continuas y es simétrica respecto del eje de ordenadas, es decir una función par.

La gráfica de g(x) = $\frac{1}{1+x^2}$ es también simétrica par, y por lo tanto simétrica respecto al eje de ordenadas.

Como es una función racional hallamos su gráfica mediante sus asíntotas y puntos de corte con los ejes.

- Su dominio es R ya que no se puede anular el denominador y por lo tanto no tiene asíntotas verticales.
- Corta al eje OY en x = 0 $\Rightarrow$ g(0) = $\frac{1}{1+0^2}$ = 1, es decir el punto (0,1).
- Tiene asíntota horizontal ya que $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ = 0 a la que se acerca por encima.
- Si derivamos obtenemos:

  g'(x) = $-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ que negativa para x>0 y positiva en x<0, por lo tanto es creciente en (-∞,0) y decreciente en (0, +∞) y por lo tanto el punto (0,1) es un máximo.

Finalmente calculamos los puntos de corte de f y g.

- De f(x) = g(x) y x > 0 tenemos que $\frac{1}{1+x^2}$ = $\frac{x}{2}$ $\Rightarrow$ x(1+ x^2) = 2 $\Rightarrow$ x^3+x-2 = 0. Cuya única solución real es x = 1 tal como comprobamos por Ruffini:

	1	0	1	-2
1		1	1	2
	1	1	2	0

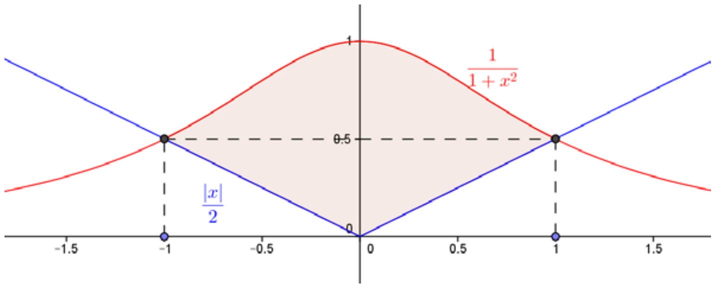
  Queda x^2+x+2 = 0 con soluciones complejas conjugadas:

  x = $\frac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}$

  Sustituimos valores obteniendo que el punto de corte es $\left(1,\frac{1}{2}\right)$

- Como ambas funciones presentan simetrías pares el otro punto de corte es $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica de f es:



b) Para calcular el área del recinto limitado por las gráficas de f y g observamos la simetría de la figura respecto al eje de ordenadas, luego:

$$\mathbf{A} = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{2}\right)dx = 2.\left(\operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = 2\cdot(\text{arc tg}(1) - \frac{1}{4} - \text{arc tg}(0)+0) = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

Opción B

Ejercicio 1.- Considera la función derivable f: R → R definida por

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

a) [1,75 puntos] Calcula a y b.
b) [0,75 punto] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = -1.

Solución:

a) Como es derivable en su dominio, por tanto también es continua en su dominio; en particular es continua y derivable en x = 0.

Como es continua en x = 0, f(0) = $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Como ambas funciones f y g son continuas en el intervalo [a -δ, a + δ] y derivables en el intervalo (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y tales que $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ podemos aplicar la regla de L'Hôpital, que dice que se verifica que $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \frac{1+1}{2} = 1$$

f(0) = $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (ax+b) = b$

Igualando valores obtenemos que **b = 1**

Como es derivable en x = 0, f'(0⁻) = f'(0⁺)

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2x} - 1}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{2x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Indeterminación que resolvemos aplicando la regla de L'Hôpital:

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{4x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Indeterminación que resolvemos aplicando nuevamente la regla de L'Hôpital:

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{4} = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{ax+1-1}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{ax}{x} = \lim_{x\to 0^-} a = a$$

Igualando valores obtenemos que **a = 0**

b) Para hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = -1 utilizamos la ecuación en forma punto-pendiente. Como x = -1 está en la rama de la izquierda:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} \Rightarrow f(-1) = \frac{e^{-1} - e^{1}}{-2} = \frac{1/e - e}{-2} = \frac{1/e - e}{-2} = \frac{e^2 - 1}{2e}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x}).2x - (e^x - e^{-x}).2}{(2x)^2} = \frac{2e^x(x-1) + 2e^{-x}.(x+1)}{4x^2}$$

Sustituyendo valores:

$$f'(-1) = \frac{2e^{-1}(-1-1) + 2e.(-1+1)}{4(-1)^2} = \frac{-4e^{-1}}{4} = \frac{-1}{e}$$

Luego la recta tangente en x = -1 es:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Rightarrow y - \frac{e^2-1}{2e} = \frac{-1}{e}(x+1) \Rightarrow y = -\frac{x}{e} + \frac{e^2-3}{2e}$$

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] De entre todos los número reales positivos, determina el que sumado con su inverso da suma mínima.

Solución:

Es un problema de optimización, siendo la función a minimizar:

$$S(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$S'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

Si la suma es mínima, $S'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1$ con soluciones x = ± 1. Como son números reales positivos sólo sirve x = 1.

Comprobemos que es un mínimo utilizando el criterio de la segunda derivada:

$$S''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow S''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0$$

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Sea la función definida por f(x) = x·ln(x + 1) para x > -1 (ln denota el logaritmo neperiano). Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1, 0).

Solución:

Una primitiva de f es:

$$F(x) = \int x\cdot \ln(x+1).dx$$

Que es una integral por partes por partes siendo:

$u = \ln(x + 1)$ $\quad dv = x\cdot dx$

$du = \frac{1}{x+1}$ $\quad v = \frac{x^2}{2}$

$$F(x) = \int x\cdot\ln(x+1).dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x+1) - \int \frac{x^2}{2(1+x)}.dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x}.dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x+1) - \frac{1}{2}I_1$$

I_1 es una integral racional con mayor grado del numerador que el denominador:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 1+x \\ \hline -x^2+x & x-1 \\ \hline \quad x+1 & \\ \hline \qquad 1 & \end{array}$$

Aplicando que $\dfrac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \dfrac{r(x)}{d(x)}$:

$$\int \frac{x^2}{1+x}.dx = \int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - x + Ln|x+1|$$

Por lo tanto la primitiva es:

$$F(x) = \frac{x^2-1}{2}\cdot ln(x+1) - \frac{x(x-2)}{4} + K$$

Como pasa por el punto (1, 0), F(1) = 0:

$$F(1) = \frac{1-1}{2}\cdot ln(1+1) - \frac{1(1-2)}{4} + K \Rightarrow \frac{1}{4} + K = 0 \Rightarrow K = -\frac{1}{4}$$

La primitiva pedida es

$$\mathbf{F(x) = \frac{x^2-1}{2}\cdot ln(x+1) - \frac{x(x-2)}{4} + \frac{1}{4}}$$

Ejercicio 4.- Considera el recinto limitado por las siguientes curvas $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $y = 4$
a) [1 punto] Haz un esbozo del recinto y calcula los puntos de corte de las curvas.
b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto.

Solución:

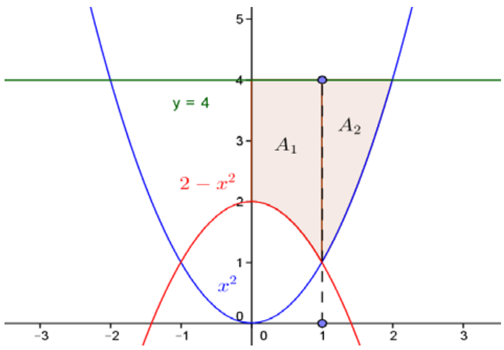
a) Haz un esbozo del recinto y calcula los puntos de corte de las curvas.

La gráfica de $f(x) = x^2$ es la de una parábola convexa porque el coeficiente de x^2 es positivo, siendo su vértice el mínimo solución de $f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$, es decir el vértice es el punto V= (0, 0).

La gráfica de $g(x) = 2-x^2$ es la de una parábola cóncava porque el coeficiente de x^2 es positivo es negativo, siendo su vértice el máximo solución de $f'(x) = -2x = 0 \Rightarrow x = 0$, es decir el vértice es el punto V= (0, 2).

La gráfica de y = 4 es la de una recta paralela al eje de abscisas que pasa por la ordenada 4.

Un esbozo de las gráficas es la de la figura adjunta.



Hallamos puntos de corte:

$x^2 = 2-x^2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1$ y $x = 1$.

$x^2 = 4 \Rightarrow x = -2$ y $x = 2$

b) Para calcular el área del recinto debemos tener en cuenta que las gráficas de las funciones presentan simetría par, es decir son simétricas respecto al eje de ordenadas:

$$\text{Área} = 2\cdot(A_1+A_2) = 2\left[\int_0^1\left(4-(2-x^2)\right)dx + \int_1^2\left(4-x^2\right)dx\right] = 2\left[\int_0^1(2+x^2)dx + \int_1^2\left(4-x^2\right)dx\right] =$$

$$= 2.\left(2x+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + 2\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = 2.\left(2+\frac{1}{3}\right) + 2.\left[\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(4-\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{14}{3} + \frac{10}{3} = \frac{24}{3} = \mathbf{8\ u^2}.$$