Opción A

1.- **a) [1 punto]** Si A y B son dos matrices cuadradas y del mismo orden, ¿es cierta en general la relación $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$? Justifica la respuesta.

b) [1,5 puntos] Calcula, según los valores de a, el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

2.- a) **[1,5 puntos]** El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale cero para a = 3.

Comprueba esta afirmación sin desarrollarlo e indicando las propiedades de los determinantes que apliques.
b) [1 punto] Determina todos los valores de "a" para los que las tres columnas del determinante anterior representan vectores linealmente dependientes. Justifica la respuesta.

3.- Considera el sistema de ecuaciones:
$2x - 2y - z = 4,$
$x + 2y - 2z = -1,$
$x - z = 1.$
a**) [1,25 puntos]**¿Existe una solución del mismo en la que y = 0?
b) [1,25 puntos] Resuelve el sistema homogéneo asociado al sistema dado.

4.- Una tienda vende una clase de calcetines a 12€ ptas. el par. Al llegar las rebajas, durante el primer mes realiza un 30% de descuento sobre el precio inicial y en el segundo mes un 40% también sobre el precio inicial. Sabiendo que vende un total de 600 pares de calcetines por 5976€ y que en las rebajas ha vendido la mitad de dicho total, ¿a cuántos pares de calcetines se les ha aplicado el descuento del 40 %?

Opción B

1.- Dado $x \in \mathbb{R}$, considera la matriz $A = \begin{pmatrix} \cos(x) & \text{sen}(x) \\ -\text{sen}(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$

a) [1 punto] Calcula $A A^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.
b) [1,5 puntos] Prueba que A tiene inversa y hállala.

2.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$ donde a, b y c son no nulos.

a) [1 punto] Determina el número de columnas de A que son linealmente independientes.
b) [1,5 puntos] Calcula el rango de A y razona si dicha matriz tiene inversa.

3.- Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 2 & -1 & \alpha \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a) [1 punto] ¿Para qué valores de α no tiene inversa la matriz de coeficientes del sistema anterior?
b) [1,5 puntos] Discute sus soluciones según los valores de α.

4.- **[2,5 puntos]** En un supermercado se ofrecen dos lotes formados por distintas cantidades de los mismos productos.

- El primer lote está compuesto por una botella de cerveza, tres bolsas de cacahuetes y siete vasos y su precio es de 4,25€.
- El segundo lote está compuesto por una botella de cerveza, cuatro bolsas de cacahuetes y diez vasos y su precio es de 5,5€.

Con estos datos ¿podrías averiguar cuánto debería valer un lote formado por una botella de cerveza, una bolsa de cacahuetes y un vaso? Justifica la respuesta.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Opción A

1.- a) [1 punto] Si A y B son dos matrices cuadradas y del mismo orden, ¿es cierta en general la relación $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$? Justifica la respuesta.

b) [1,5 puntos] Calcula, según los valores de a, el rango de la matriz

M = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

Solución:

a) Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden se verifica:

$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

como en general el producto de matrices no verifica la propiedad conmutativa, normalmente $AB \neq BA$, luego la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ en general no es cierta.

b) Entendemos por rango de una matriz el número de filas o columnas que son linealmente independientes. En nuestro caso observamos que la 2ª columna es el doble de la 1ª y la 3ª columna es el triple de la misma, por lo tanto para el cálculo del rango podemos prescindir de la 2ª y 3ª columnas, quedando:

$$rg(M) = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 8 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

Observamos que:

- Si $a = 4 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg(M) = 1$.
- Si $a \neq 4 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(M) = 2$.

2.- a) [1,5 puntos] El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale cero para a = 3.

Comprueba esta afirmación sin desarrollarlo e indicando las propiedades de los determinantes que apliques.

b) [1 punto] Determina todos los valores de "a" para los que las tres columnas del determinante anterior representan vectores linealmente dependientes. Justifica la respuesta.

Solución:

a) Si sustituimos a por 3 el determinante queda como

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 13 \\ 8 & 27 & 35 \end{vmatrix}$$

Como la 3ª columna es combinación lineal de la 1ª y 2ª (suma de ambas) el determinante es nulo.

b) Las tres columnas del determinante anterior representan vectores linealmente dependientes si el valor del mismo es cero. Hallemos el valor del determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix} = 2a.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & a & 13 \\ 4 & a^2 & 35 \end{vmatrix} = 2a.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & a-2 & 3 \\ 0 & a^2-4 & 15 \end{vmatrix} = 2a.\begin{vmatrix} a-2 & 3 \\ a^2-4 & 15 \end{vmatrix} = 2a(-3a^2+15a-18)$$

Obliguemos a que sea nulo:

$2a(-3a^2+15a-18) = 0 \Rightarrow -6a(a-3)(a-2) = 0$

con soluciones a = 0, a =2 y a =3.

3.- Considera el sistema de ecuaciones:
2x -2y- z = 4,
x +2y-2z = -1,
x - z = 1.
a) [1,25 puntos]¿Existe una solución del mismo en la que y = 0?
b) [1,25 puntos] Resuelve el sistema homogéneo asociado al sistema dado.

Solución:
a) Calculamos la compatibilidad del sistema. La matriz asociada y su determinante valen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -4+4+2-2 = 0$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, rg(A) =2.

La matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Orlamos el menor no nulo y obtenemos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4+2-8+2 = 0, \text{ rg}(A') = \text{rg}(A) = 2 < 3$$

y el sistema es compatible indeterminado, es decir tendrá infinitas soluciones. Eliminamos una ecuación, por ejemplo la segunda, ya que el menor $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, y el sistema será equivalente a:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 2y - z = 4 \\ x \quad - z = 1 \end{array}\right\}$$

Si tomamos z =λ, y resolvemos la ecuación queda:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 2y = 4 + \lambda \\ x \quad = 1 + \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2(1+\lambda) -2y = 4+\lambda \Rightarrow 2+2\lambda -2y = 4+\lambda \Rightarrow -2y = 2-\lambda \Rightarrow y = -1+\frac{\lambda}{2}$$

Luego las soluciones serán:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = -1+\dfrac{\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{array}\right., \text{ con } \lambda \in \mathbf{R}.$$

Veamos que existe una solución en la que y = 0
Si y = 0 $\Rightarrow \lambda = 2$, x = 3, z = 2
Luego la solución será: (3, 0, 2)

b) El sistema homogéneo asociado será:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 2y - z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ x \quad - z = 0 \end{array}\right\}$$

Como $|A|$ = 0 y rg(A) = 2 por el apartado anterior, el sistema tendrá soluciones distintas de la trivial y será equivalente al:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 2y - z = 0 \\ x \quad - z = 0 \end{array}\right\}$$

Si tomamos z = λ, y resolvemos la ecuación queda:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 2y = \lambda \\ x \quad = \lambda \end{array}\right\}$$

2λ -2y = $\lambda \Rightarrow$ -2y = -λ $\Rightarrow$ y = $\frac{\lambda}{2}$

Luego las soluciones serán:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \frac{\lambda}{2}, \text{ con } \lambda \in \mathbf{R} \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Es decir, S = $\left\{\left(\lambda, \frac{\lambda}{2}, \lambda\right) / \lambda \in \Re\right\}$

4.- **Una tienda vende una clase de calcetines a 12€ ptas. el par. Al llegar las rebajas, durante el primer mes realiza un 30% de descuento sobre el precio inicial y en el segundo mes un 40% también sobre el precio inicial. Sabiendo que vende un total de 600 pares de calcetines por 5976€ y que en las rebajas ha vendido la mitad de dicho total, ¿a cuántos pares de calcetines se les ha aplicado el descuento del 40 %?**

Solución:

Si el precio inicial era de 12€, con el 30% de descuento el precio es 8,4€ y con el 40% de descuento el precio es 7,2€.

Sabiendo que vende un total de 600 pares y que en las rebajas ha vendido la mitad de dicho total
- ha vendido 300 pares sin rebajar por: 300x12 = 3600€.
- ha vendido 300 pares rebajados por: 5976-3600 = 2376€.

Llamando x al número de pares vendidos con un 30% de descuento (8,4€) y 300-x al número de pares vendidos con un 40% de descuento (7,2€), obtenemos la ecuación:

8,4x +7,2.(300-x) = 2376 $\Rightarrow$ 1,2x+2160 = 2376 $\Rightarrow$ 1,2x = 216

con solución:

x = $\frac{216}{1,2}$ = 180, 300-x = 120

Es decir, se han vendido:
180 pares con 30% descuento
120 pares con 40% descuento.

Opción B

1.- **Dado x$\in\mathbb{R}$, considera la matriz**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

a) [1 punto] Calcula A A^t, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.
b) [1,5 puntos] Prueba que A tiene inversa y hállala.

Solución:

a) Como la matriz traspuesta es

$$A^t = \begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}$$

el producto pedido es

$$A.A^t = \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x & -\cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x \\ -\operatorname{sen} x \cos x + \cos x \operatorname{sen} x & \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Para que tenga inversa ha de ocurrir que el determinante de la matriz ha de ser distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \neq 0$$

según el apartado anterior $A.A^t = I$, veamos que ocurre con el producto $A^t.A$:

$$A^t.A = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\operatorname{sen}(x) \\ \operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos(x) & -\operatorname{sen}(x) \\ -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x & \cos x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x \\ \operatorname{sen} x \cos x - \cos x \operatorname{sen} x & \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego deducimos que la traspuesta de A coincide con su inversa.

2.- Considera la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$$

donde a, b y c son no nulos.

a) [1 punto] Determina el número de columnas de A que son linealmente independientes.

b) [1,5 puntos] Calcula el rango de A y razona si dicha matriz tiene inversa.

Solución:

a) Tenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$$

para calcular el número de columnas que son independientes calculamos el rango de A, ya que ambos valores coinciden. Como el determinante, sumando a la 2ª fila la 1ª, es:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a & 0 & 4c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix} = 0$$

por tener la 2ª y 3ª filas iguales. El rango de la matriz es 3.

Además hay un menor de orden 2 no nulo puesto que:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 2a & -b \end{vmatrix} = -3ab \neq 0$$

ya que tanto a como b son no nulos según el enunciado del problema. Luego rg(A) = 2 y hay dos columnas linealmente independientes.

b) En el apartado anterior hemos calculado el rango de A, que era 2 y como $|A| = 0$ sabemos que no tiene inversa.

3.- Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 2 & -1 & \alpha \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a) [1 punto] ¿Para qué valores de α no tiene inversa la matriz de coeficientes del sistema anterior?

b) [1,5 puntos] Discute sus soluciones según los valores de α.

Solución:

a) Para que la matriz A de los coeficientes del sistema no tenga inversa, su determinante ha de ser cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 2 & -1 & \alpha \\ 1 & 10 & -6 \end{vmatrix} = \alpha^2+2\alpha-15$$

Igualando a cero, tendremos: $\alpha^2+2\alpha-15 = 0$

$$\alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4.15}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \Rightarrow \alpha = 3 \text{ y } \alpha = -5$$

luego la matriz A no tendrá inversa para $\alpha \in \{3,-5\}$

b) Si $\alpha \notin \{3,-5\}$ El rango de A es 3, y por lo tanto el rango de la matriz ampliada también será 3, que es el número de incógnitas, y por el Teorema de Rouché el sistema tendrá solución única, es decir representa tres planos que se cortan en un punto.

- Si $\alpha = -5$ el sistema será:

  $$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  el rango de A es 2, ya que $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Como $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -24 \neq 0$ y por lo tanto el rango de la matriz ampliada será 3, y el sistema será incompatible, es decir no tendrá solución, y como los planos no son paralelos, representan tres caras de un prisma triangular.

- Si $\alpha = 3$ el sistema será:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  el rango de A es 2, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 0$ y por lo tanto el rango de la matriz ampliada será 2, y el sistema será compatible indeterminado, es decir tendrá infinitas soluciones.

4.- [2,5 puntos] En un supermercado se ofrecen dos lotes formados por distintas cantidades de los mismos productos.

- **El primer lote está compuesto por una botella de cerveza, tres bolsas de cacahuetes y siete vasos y su precio es de 4,25€.**
- **El segundo lote está compuesto por una botella de cerveza, cuatro bolsas de cacahuetes y diez vasos y su precio es de 5,5€.**

Con estos datos ¿podrías averiguar cuánto debería valer un lote formado por una botella de cerveza, una bolsa de cacahuetes y un vaso? Justifica la respuesta.

Solución:

Sean

x = precio de una botella de cerveza

y = precio de una bolsa de cacahuetes

z = precio de un vaso

Los precios de los distintos lotes son:

- $x+3y+7z = 4,25$ para el primer lote
- $x+4y+10z = 5,5$ para el segundo lote
- $x+y+z = P$ para el tercer lote

Queremos encontrar el precio del tercer lote conocidos los anteriores, es decir encontrar dos números a y b tales que:

$a(x+3y+7z) + b(x+4y+10z) = x+ y+ z$

$(a+b)x+(3a+4b)y+(7a+10b)z = x+y+z$

Igualdad que se cumple si son iguales los coeficientes:

$a+ \ b = 1$

$3a+ 4b = 1$

$7a+10b =1$

Su solución se encuentra sustituyendo a = 1-b en la segunda ecuación:

$3(1-b)+ 4b = 1 \Rightarrow 3+b = 1 \Rightarrow b = 1-3 = -2$

$a = 1-(-2) = 3$

Y comprobando que se cumple para dichos valores la tercera ecuación:

$7.3+10(-2) =1$

Luego el precio del tercer lote será:

$a(x+3y+7z) + b(x+4y+10z) = 3.4,25+(-2).5,5 = 1,75$€.

Opción A

1.- **[2,5 puntos]** Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Determina, si existe, la matriz X que verifica $A\cdot X + B = A^2$.

2.- Se sabe que el determinante de la matiz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es - 3.

Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) [1 punto] det(-2A) y $\det(A^{-1})$.

b) [1,5 puntos] $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}+a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23}+a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$x + 2y - 3z = 3$

$2x + 3y + z = 5$

a) [1,5 puntos] Calcula α de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + y - 7z = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el original.

b) [1 punto] Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4.

4.- Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado 22 euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de 14 euros. Se pide:

a) [1,25 puntos] Expresar en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.

b) [1,25 puntos] Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.

Opción B

1.- Considera las matrices, A = $\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) [0,75 puntos] ¿Para qué valores de m se verifica que $A^2 = 2\cdot A + I$? (I denota la matriz identidad).
b) [1,75 puntos] Para m = 1, calcula A^{-1} y la matriz X que satisface $A\cdot X - B = A\cdot B$.

2.- Sabiendo que el determinante de la matriz A = $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2, calcula los siguientes determinantes sin desarrollarlos:

a) [0,5 puntos] det(3A).
b) [0,5 puntos] det(A^{-1}).
c) [0,75 puntos] $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.
d) [0,75 puntos] $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} x+(m+1)y+2z=-1 \\ mx+y+z=m \\ (1-m)x+2y+z=-m-1 \end{cases}$$

a) [1,75 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m.
b) [0,75 puntos] Resuélvelo para m = 2. Para dicho valor de m, calcula, si es posible, una solución en la que z=2.

4.- **[2,5 puntos]** Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales A, B y C. El primer lingote contiene 20 g del metal A, 20 g del B y 60 del C. El segundo contiene 10 g de A, 40 g de B y 50 g de C. El tercero contiene 20 g de A, 40 g de B y 40 g de C. Queremos elaborar a partir de estos lingotes uno nuevo que contenga 15 g de A, 35 g de B y 50 g de C. ¿Cuántos gramos hay que coger de cada uno de los tres lingotes?

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Opción A

1.- [2,5 puntos] Considera las matrices A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **y B =** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$**.**

Determina, si existe, la matriz X que verifica $A \cdot X + B = A^2$.

Solución:

La matriz tiene inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t)$ si su determinante es no nulo. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0+0+0)-(0+0+1) = -1$$

La matriz tiene inversa.

Obtenemos la matriz traspuesta:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de los adjuntos de la traspuesta será:

$$Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego la inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejamos en la ecuación matricial:

$A \cdot X = A^2 - B$

Multiplicamos por la izquierda por la izquierda:

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot A^2 - A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A - A^{-1} \cdot B$

Sustituyendo por las matrices, obtenemos la matriz X:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

2.- Se sabe que el determinante de la matiz A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ **es - 3.**

Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) [1 punto] det(-2A) y det(A^{-1}).

b) [1,5 puntos] $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ **y** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}+a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23}+a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$**.**

Solución:

a) Como $|k \cdot A| = k^n.|A|$ tenemos que:

$|-2A| = (-2)^3.|A| = -8.(-3) = 24$

Como el producto de una matriz por su inversa es la identidad $A^{-1} \cdot A = I$ y el determinante de un producto es el producto de determinantes $|A.B| = |A|.|B|$ tenemos que:

$$|I| = |A^{-1}| \cdot |A| \Rightarrow 1 = |A^{-1}| \cdot |A| \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-3} = \frac{-1}{3}$$

b) Utilizando las propiedades:

- Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante
- Si intercambiamos entre si dos filas (columnas) de un determinante el determinante cambia de signo.

Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} = 7.2. \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -14. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -14\text{-}3 = -42$$

Utilizando las propiedades:

- Si una fila (columna) un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes colocando en dicha fila (columna) el
- primer y segundo sumando respectivamente.
- Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante
- Si un determinante tiene dos filas proporcionales, dicho determinante vale 0.
- El determinante de una matriz es igual al determinante de su matriz traspuesta.

Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}+a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22}+a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23}+a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & 5a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} = 5. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} +0 = 5.(-3) = -15$$

3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$x + 2y - 3z = 3$

$2x + 3y + z = 5$

a) [1,5 puntos] Calcula α de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + y - 7z = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el original.

b) [1 punto] Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4.

Solución:

a) Como el sistema tiene dos ecuaciones, como mucho el rango ha de ser dos. Al ser el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

tiene de rango 2, y al tener tres incógnitas es un sistema compatible indeterminado, es decir con infinitas soluciones.

Si le añadimos la ecuación $\alpha x + y - 7z = 1$ al sistema, para que tenga las mismas soluciones que el original la matriz de las coeficientes A del nuevo sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ \alpha x + y - 7z = 1 \end{cases}$$

ha de tener rango 2, por lo tanto el determinante asociado a la matriz de coeficientes del sistema ha de ser nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ \alpha & 1 & -7 \end{vmatrix} = (-21+2\alpha-6)-(-9\alpha+1-28) = 11\alpha$$

Por lo tanto para que ambos sistemas tengan las mismas soluciones $\alpha = 0$.

b) Si la suma de los valores de las incógnitas es 4, tenemos la ecuación x+y+z = 4. Queda el sistema:

$$\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 2x+3y+z=5 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

Aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius obtenemos que es un sistema compatible y determinado con solución única, ya que la matriz de coeficientes tiene determinante no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3+2-6)-(-9+1+4) = 3$$

Lo resolveremos aplicando la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{25}{3}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-11}{3}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{3}$$

Se obtiene la solución (x, y, z) = $\left(\frac{25}{3}, \frac{-11}{3}, \frac{-2}{3},\right)$.

4.- **Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado 22 euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de 14 euros. Se pide:**
a) [1,25 puntos] Expresar en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.
b) [1,25 puntos] Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.

Solución:
Sea x el precio de un cuaderno
Sea y el precio de un rotulador
Sea z el precio de un bolígrafo

a) El enunciado se traduce en el sistema:

$$\begin{cases} 5x+2y+3z=22 \\ 2x+y+6z=14 \end{cases}$$

Es un sistema compatible indeterminado ya que tiene tres incógnitas y como el menor $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ se cumple que rg(A) = 2. Lo parametrizamos en función de z (precio del bolígrafo como indica el enunciado).

$$\begin{cases} 5x+2y=22-3z \\ 2x+y=14-6z \end{cases}$$

Si a la primera ecuación le restamos la segunda multiplicada por 2 queda:
x = 9z-6

Expresión que sustituida en la 2ª ecuación da:
$18z-12+y = 14-6z \Rightarrow y = 14-6z-18z+12 = 26-24z$

Es decir que:

- Un cuaderno cuesta 9 veces lo que un bolígrafo menos 6 euros.
- Un rotulador cuesta 26 euros menos 24 veces lo que un bolígrafo.

b) Para calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores, sustituimos lo que valen en función del precio de un bolígrafo:
8x+3y = 8(9z-6)+3(26-24z) = 72z-48+78-72z = 30€

Opción B

1.- **Considera las matrices, A =** $\begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$ **y B =** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) [0,75 puntos] ¿Para qué valores de m se verifica que A^2 = 2·A + I? (I denota la matriz identidad).
b) [1,75 puntos] Para m = 1, calcula A^{-1} y la matriz X que satisface A·X - B = A·B.

Solución:
Calculamos:

$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m+1)^2 & 2 \\ 2 & (m-1)^2 \end{pmatrix}$

$2 \cdot A + I = 2. \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix}$

Sustituyendo en la igualdad matricial obtenemos:

$\begin{pmatrix} (m+1)^2 & 2 \\ 2 & (m-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix}$

Igualamos elemento a elemento, obteniendo el sistema:
$m^2+2m+2 = 3+2m \Rightarrow m^2 = 1$, de donde m = ± 1.
2 = 2. Cierto
2 = 2. Cierto
$m^2 - 2m + 2 = 3 - 2m \Rightarrow m^2 = 1$, de donde m = ± 1.
Por tanto la igualdad es cierta si m = ± 1.

b) Para m = 1, A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matriz tiene inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t)$ si su determinante es no nulo. Como

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-1 = -1$

La matriz tiene inversa.

Obtenemos la matriz traspuesta:

$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

La matriz de los adjuntos de la traspuesta será:

$Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Luego la inversa de A es:

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

De A·X - B = A·B, tenemos:
A·X = B + A·B.

Como existe la matriz inversa multiplicamos por la izquierda la expresión por A^{-1}.
$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B + A \cdot B) \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B + A^{-1} \cdot A \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B + B$

Sustituyendo las matrices:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.- Sabiendo que el determinante de la matiz A = $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2, calcula los siguientes determinantes sin desarrollarlos::

a) [0,5 puntos] det(3A).

b) [0,5 puntos] det(A-1).

c) [0,75 puntos] $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$**.**

d) [0,75 puntos] $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$**.**

Solución:

a) Como $|k \cdot A| = k^n.|A|$ tenemos que:

$|3A| = 3^3.|A| = 27.2 = 54$

b) Como el producto de una matriz por su inversa es la identidad $A^{-1} \cdot A = I$ y el determinante de un producto es el producto de determinantes $|A.B| = |A|.|B|$ tenemos que:

$|I| = |A^{-1}| \cdot |A| \Rightarrow 1 = |A^{-1}| \cdot |A| \Rightarrow |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{2}$

c) Utilizando las propiedades:

- Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.
- Si intercambiamos entre si dos filas (columnas) de un determinante el determinante cambia de signo.

Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3.2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6.(-1). \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6.2 = -12$$

d) Utilizando las propiedades:

- Si una fila (columna) un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes colocando en dicha fila (columna) el primer y segundo sumando respectivamente.
- Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.
- Si un determinante tiene dos filas proporcionales, dicho determinante vale 0.
- Si intercambiamos entre si dos filas (columnas) de un determinante el determinante cambia de signo.

Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 = (-1).(-1) \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} x+(m+1)y+2z=-1 \\ mx+y+z=m \\ (1-m)x+2y+z=-m-1 \end{cases}$$

a) [1,75 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m.
b) [0,75 puntos] Resuélvelo para m = 2. Para dicho valor de m, calcula, si es posible, una solución en la que z=2.

Solución:
a) La matriz de los coeficientes del sistema y la matriz ampliada son:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & m+1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 & m \\ 1-m & 2 & 1 & -m-1 \end{pmatrix}$$

Hallamos el determinante asociado a la matriz del sistema:

$$A=\begin{vmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \end{vmatrix} = [1-(m+1)(-1+m)+4m]-[2(1-m)+2+m(m+1)] = -2m^2+5m-2.$$

Resolviendo la ecuación $2m^2-5m+2=0$, obtenemos las soluciones $m = 2$ y $m = \frac{1}{2}$.

- Si $m \neq 2$ y $m \neq \frac{1}{2}$, $|A| \neq 0$, rango(A) = rango(A*) = 3 = nº de incógnitas. Aplicando el Teorema de Rouché-Frobenius sabemos que el sistema es compatible y determinado con tiene solución única.

- Si $m = \frac{1}{2}$ tenemos la matriz de los coeficientes del sistema y la matriz ampliada:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}$$

  Como el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4} \neq 0, \text{ tenemos que rg(A) = 2}$$

  Como el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 3/2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & -3/2 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}[(-12+3-8)-(-4+8-9)] = \frac{-12}{8} \neq 0, \text{ tenemos que rg(A) = 3}$$

Como rg(A) ≠ rg(A*), el sistema es incompatible y no tiene solución.

- Si **m = 2** tenemos la matriz de los coeficientes del sistema y la matriz ampliada:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

  Como el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-6 = -5 \neq 0, \text{ tenemos que rg(A) = 2}$$

  Como el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$, ya que la fila la 1ª menos la 3ª es la 2ª, tenemos que rg(A*) = 2.

Como rg(A) = rg(A*) = 2 < nº de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado con tiene infinitas soluciones.

b) Como hemos visto en el apartado anterior si m = 2, rg(A) = rg(A*) = 2, el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones. Como el rango es 2, sólo necesitamos 2 ecuaciones y tomamos la 1ª y la 2ª.

$$\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$$

Tomamos z como parámetro z = $\lambda \in R$

$$\begin{cases} x+3y = -1-2\lambda \\ 2x+y = 2-\lambda \end{cases}$$

A la primera fila multiplicada por dos le resto la segunda:

$-5y = 4-3\lambda \Rightarrow y = -\frac{4}{5} - \frac{3\lambda}{5}$

Sustituyendo dicho valor en la 1ª ecuación tenemos que:

$x + 3\left(-\frac{4}{5} - \frac{3\lambda}{5}\right) = -1-2\lambda$

despejando obtenemos:

$x = \frac{7}{5} - \frac{\lambda}{5}$

La solución general es:

$(x, y, z) = \left(\frac{7}{5} - \frac{\lambda}{5}, -\frac{4}{5} - \frac{3\lambda}{5}, \lambda\right)$ con $\lambda \in R$

Tomando z = 2, la solución pedida es:

$(x, y, z) = \left(\frac{7}{5} - \frac{2}{5}, -\frac{4}{5} - \frac{3.2}{5}, 2\right) = (1,-2,2).$

4.- [2,5 puntos] Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales A, B y C. El primer lingote contiene 20 g del metal A, 20 g del B y 60 del C. El segundo contiene 10 g de A, 40 g de B y 50 g de C. El tercero contiene 20 g de A, 40 g de B y 40 g de C. Queremos elaborar a partir de estos lingotes uno nuevo que contenga 15 g de A, 35 g de B y 50 g de C. ¿Cuántos gramos hay que coger de cada uno de los tres lingotes?

Solución:

Sea x el número de lingotes del primer tipo
Sea y el número de lingotes del segundo tipo
Sea z el número de lingotes del tercer tipo
Sea A el número de gramos del primer metal
Sea B el número de gramos del segundo metal
Sea C el número de gramos del tercer metal

Del enunciado sacamos que:

15A+35B+50C = x(20A+20B+60C)+y(10A+40B+50C)+z(20A+40B+40C)

Que igualando miembro a miembro nos da el sistema:

$$\begin{cases} 20x+10y+20z=15 \\ 20x+40y+40z=35 \\ 60x+50y+40z=50 \end{cases}$$

Restando de la 2ª ecuación la 1ª y de la 3ª la 1ª multiplicada por 3 queda:

$$\begin{cases} 30y + 20z = 20 \\ 20y - 20z = 5 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que:
$50y = 25 \Rightarrow y = 0,5$

Sustituyendo en la segunda obtenemos:
$20z = 20y-5 = 10-5 = 5 \Rightarrow z = 0,25$

Sustituyendo en la primera obtenemos:
$20x+5+5 = 15 \Rightarrow 20x = 5 \Rightarrow x = 0,25$

Como los lingotes son todos de 100 gramos debemos tomar 25 grs. del primer lingote, 50 grs. del segundo y 25 grs. del tercero.