# GEOMETRÍA EN EL ESPACIO: FÓRMULAS Y CONCEPTOS IMPORTANTES

## VECTORES

### Componentes de un vector en el espacio

Si las coordenadas de A y B son: $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ Las **coordenadas o componentes del vector** $\overrightarrow{AB}$ coordenadas del extremo menos las coordenadas del origen.

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

### Módulo de un vector

El **módulo** de un **vector** es la **longitud** del **segmento** orientado que lo define.

El **módulo** de un **vector** es un **número** siempre **positivo** y solamente el **vector nulo** tiene módulo **cero**.

#### Cálculo del módulo conociendo sus componentes

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

#### Cálculo del módulo conociendo las coordenadas de los puntos

$$A(x_1, y_1, z_1) \qquad B(x_2, y_2, z_2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Dos vectores son paralelos si y solo si sus componentes son proporcionales

---

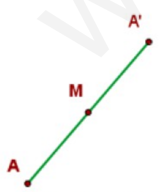
## PUNTO MEDIO Y PUNTO SIMÉTRICO

### Coordenadas del punto medio de un segmento

Sean A $(x_1, y_1, z_1)$ y B $(x_2, y_2, z_2)$ los extremos de un segmento, el **punto medio** del segmento viene dado por:


$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

### Simétrico de un punto respecto a otro




Si **A'** es el **simétrico** de **A** respecto de **M**, entonces **M** es el **punto medio** del **segmento AA'**. Por lo que se verificará igualdad:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA'}$$

de donde se obtiene que:

$$A'(2m_1 - a_1, 2m_2 - a_2, 2m_3 - a_3)$$

# ECUACIONES DE LA RECTA

Necesitamos un punto y un vector director, o bien dos puntos de la recta (usaremos como vector director el que pasa por esos puntos) para obtener todas sus ecuaciones.

Sea $P(x_{0,} y_{0,} z_0)$ un punto de la recta y $\vec{u}(u_{1,} u_{2,} u_3)$ un vector director.

ECUACIÓN VECTORIAL:

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda\cdot(u_1,u_2,u_3)$$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS:

$$\begin{cases} x = x_0+\lambda\cdot u_1 \\ y = y_0+\lambda\cdot u_2 \\ z = z_0+\lambda\cdot u_3 \end{cases}$$

ECUACIÓN CONTINUA:

Despejando e igualando λ en las **ecuaciones paramétricas** se tiene:

$$\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}=\frac{z-z_0}{u_3}$$

ECUACIÓN IMPLÍCITA:

Una **recta** puede venir determinada por la **intersección de los planos**.

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

Si en las **ecuaciones continuas de la recta** quitamos denominadores y pasamos todo al primer miembro, obtenemos las **ecuaciones implícitas**.

---

# ECUACIONES DEL PLANO

Necesitamos un punto y dos vectores no paralelos del plano, o bien tres puntos no alineados (uniendo los puntos obtendremos los dos vectores que necesitamos)

Sea $P(x_{0,} y_{0,} z_0)$ un punto del plano y $\vec{u}(u_{1,} u_{2,} u_3)$ y $\vec{v}(v_{1,} v_{2,} v_3)$ vectores del plano

ECUACIÓN VECTORIAL:

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda(u_1,u_2,u_3)+\mu(v_1,v_2,v_3)$$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS:

$$\begin{cases} x = x_0+u_1\lambda+v_1\mu \\ y = y_0+u_2\lambda+v_2\mu \\ z = z_0+u_3\lambda+v_3\mu \end{cases}$$

ECUACIÓN GENERAL DEL PLANO

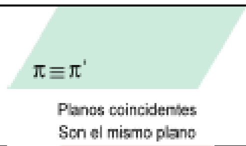
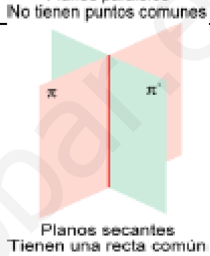
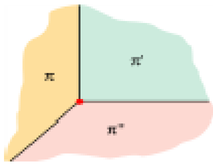
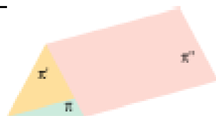
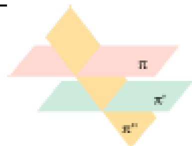
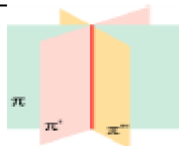
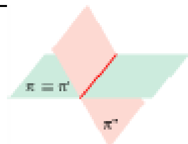
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=0$$

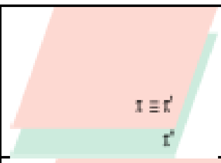
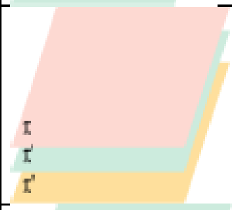
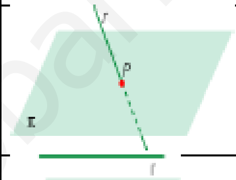
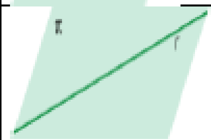
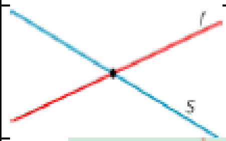
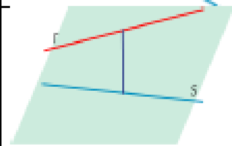
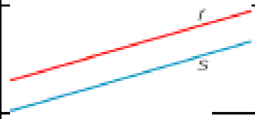
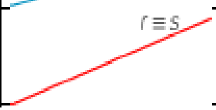
Desarrollando el determinante nos queda una expresión del tipo:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

donde (A,B,C) es el vector normal (perpendicular) al plano

# Resumen de posiciones relativas en el espacio

| | | | |
|---|---|---|---|
| DOS PLANOS<br>$\pi$: Ax+By+CZ+D=0<br>$\pi$':A'x+B'y+C'z+D'=0<br><br>$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ | rangM=rangM*=1 | Planos coincidentes |  |
| | rangM=1≠<br>rangM*=2 | Planos paralelos |  |
| | rangM=rangM*=2 | Planos secantes |  |
| TRES PLANOS<br><br>$\pi$: Ax+By+CZ+D=0<br>$\pi$':A'x+B'y+C'z+D'=0<br>$\pi$'':A''x+B''y+C''z+D''=0<br><br>$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$ | rangM=rangM*=3 | Planos secantes en un punto formando un triedro |  |
| | rangM=2≠<br>rangM*=3<br><br>( los 3 planos no tienen ningún punto en común) | Planos secantes 2 a 2 formando una superficie prismática. |  |
| | | 2 planos paralelos y el otro los corta. |  |
| | rangM=2=rang M*<br><br>(planos que se cortan en una recta) | Planos distintos que se cortan en una recta. |  |
| | | 2 de los planos son coincidentes y el otro los corta. |  |

<table>
<tr><td rowspan="3">TRES PLANOS<br><br>π: Ax+By+CZ+D=0<br>π':A'x+B'y+C'z+D'=0<br>π'':A''x+B''y+C''z+D''=0<br><br>$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$</td><td rowspan="2">rangM =1≠<br>rang M*=2<br><br>( los 3 planos no tienen ningún punto en común)</td><td>2 planos coincidentes y el otro paralelo.</td><td></td></tr>
<tr><td>Planos paralelos y distintos 2 a2</td><td></td></tr>
<tr><td>rangM=1=rangoM*</td><td>Planos coincidentes<br>(3 ecuaciones equivalentes del mismo plano).</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">RECTA Y PLANO<br><br>$\left.\begin{array}{r} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right\}: r$<br><br>Π : A''x+B''y+C''z+D''=0<br><br>$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$</td><td>rangM=rangM*=3</td><td>Recta y plano secantes.<br>(P=r⋂ $\pi$=pto de corte).</td><td></td></tr>
<tr><td>rangM=2≠<br>rangM*=3</td><td>Recta y plano paralelos</td><td></td></tr>
<tr><td>rangM=rangM*=2</td><td>Recta contenida en el plano</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">DOS RECTAS<br><br>r (A , $\vec{v}$ )<br><br>s (B , $\vec{w}$ )</td><td>rango ( $\vec{v}$ , $\vec{w}$ )=2<br>rango( $\vec{v}$ , $\vec{w}$ , $\overrightarrow{AB}$ )=2</td><td>Rectas secantes (tienen un único punto en común)</td><td></td></tr>
<tr><td>rango ( $\vec{v}$ , $\vec{w}$ )=2<br>rango( $\vec{v}$ , $\vec{w}$ , $\overrightarrow{AB}$ )=3</td><td>Rectas que se cruzan ( no tienen nigúnpto en común)</td><td></td></tr>
<tr><td>rango ( $\vec{v}$ , $\vec{w}$ )=1<br>rango( $\vec{v}$ , $\vec{w}$ , $\overrightarrow{AB}$ )=2</td><td>Rectas paralelas</td><td></td></tr>
<tr><td>rango ( $\vec{v}$ , $\vec{w}$ )=1<br>rango( $\vec{v}$ , $\vec{w}$ , $\overrightarrow{AB}$ )=1</td><td>Rectas coincidentes</td><td></td></tr>
</table>

# PRODUCTO ESCALAR Y PRODUCTO VECTORIAL

El **producto escalar** de **dos vectores** es un **número real** que resulta al **multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.**

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$$

Expresión analítica del producto escalar

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1 . v_1+u_2 . v_2+u_3 . v_3$$

Expresión analítica del ángulo de dos vectores

$$\cos\alpha=\frac{u_1 . v_1+u_2 . v_2+u_3 . v_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$

Dos vectores no nulos son perpendiculares si y solo si su producto escalar es cero

---

El **producto vectorial** de **dos vectores** es otro **vector** cuya **dirección** es **perpendicular** a los dos vectores y su **sentido** sería igual al avance de un **sacacorchos** al girar de u a v. Su **módulo** es igual a:

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\,sen\,\alpha$$

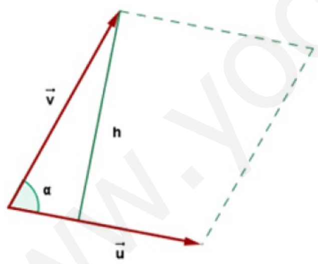
El **producto vectorial** se puede expresar mediante un **determinante**:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

## Área del paralelogramo

Geométricamente, el **módulo del producto vectorial** de dos vectores coincide con el **área del paralelogramo** que tie lados a esos vectores.

$$A=|\vec{u}|\cdot h=|\vec{u}||\vec{v}|\operatorname{sen}\alpha=|\vec{u}\times\vec{v}|$$




## Propiedades del producto vectorial

**1.** Anticonmutativa

$$\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$$

**2.** Homogénea

$$\lambda\,(\vec{u}\times\vec{v})=(\lambda\vec{u})\times\vec{v}=\vec{u}\times(\lambda\vec{v})$$

**3.** Distributiva

$$\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}\,.$$

**4.** El **producto vectorial** de dos **vectores paralelos** en igual al **vector nulo**.

$$\vec{u}\parallel\vec{v}\Rightarrow\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$$

**5.** El **producto vectorial** $\vec{u}\times\vec{v}$ es **perpendicular** a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

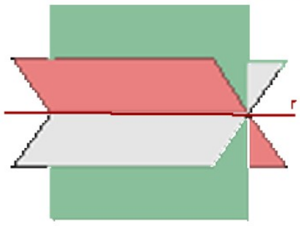
# HAZ DE PLANOS

Dos planos son paralelos si los coeficientes x, y, z de sus ecuaciones son proporcionales; pero no lo son sus términos independientes.

Todos los planos paralelos a uno dado admiten una ecuación de la forma:

$$Ax + By + Cz + k = 0 \qquad k \in \mathbb{R}$$

## Haz de planos de eje r




Si r viene definida por sus ecuaciones implícitas:

$$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

la **ecuación del haz de planos de eje r** viene dada por la igualdad:

$$\lambda\left(Ax + By + Cz + D\right) + \mu\left(A'x + B'y + C'z + D'\right) = 0$$

Si dividimos por λ y hacemos $k = \frac{\mu}{\lambda}$, la ecuación del haz resulta:

$$\left(Ax + By + Cz + D\right) + k\left(A'x + B'y + C'z + D'\right) = 0$$

---

# ÁNGULOS EN EL ESPACIO

## Ángulo entre dos rectas

El **ángulo que forman dos rectas** es igual al ángulo agudo determinado por los vectores directores de las rectas.

$$\alpha(r, s) = \alpha\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \text{arc cos} \frac{\left|u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3\right|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

**Dos rectas** son **perpendiculares** si **vectores directores** son **ortogonales**.

$$r \perp s \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \qquad u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = 0$$

## Ángulo entre dos planos

El **ángulo** formado por **dos planos** es igual al ángulo agudo determinado por los vectores normales de dichos planos.

$$\vec{n_1} = \left(A_1, B_1, C_1\right) \qquad \vec{n_2} = \left(A_2, B_2, C_2\right)$$

$$\alpha\left(\pi_1, \pi_2\right) = \alpha\left(\vec{n_1}, \vec{n_2}\right) = \text{arc cos} \frac{\left|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

## Ángulo entre recta y plano

El **ángulo** que forman una **recta** y un **plano** es igual al **complementario** del **ángulo agudo** que forman el **vector direc** la recta y el **vector normal** del plano.

$$\vec{u} = \left(u_1, u_2, u_3\right) \qquad \vec{n} = \left(A, B, C\right)$$

$$sen\, \alpha = cos\, \beta = cos\left(\vec{n}, \vec{u}\right) = \frac{\left|\vec{n} \cdot \vec{u}\right|}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\vec{u}\right|}$$

$$\alpha = arc\ sen \frac{\left|A \cdot u_1 + B \cdot u_2 + C \cdot u_3\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

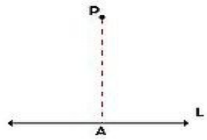
PROYECCIONES ORTOGONALES

*Punto sobre Recta*

La proyección ortogonal de P sobre la recta r es un punto Q de la recta que cumple que el segmento PQ es perpendicular a r

Para calcular el punto Q:

- Se calcula la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r
- Se calcula el punto intersección de dicho plano con la recta



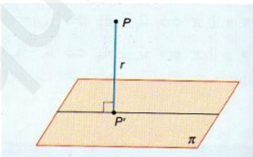

---

*Punto sobre Plano*

La proyección ortogonal de un punto P sobre un plano es otro punto Q del plano tal que el segmento PQ es perpendicular al plano.

Para calcular el punto Q:

- Hallamos la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano
- Se calcula el punto intersección de dicha recta con el plano



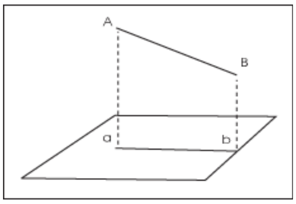

---

*Recta sobre Plano*

La proyección ortogonal de una recta r sobre un plano es otra recta s contenida en dicho plano tal que el plano que contiene a r y s es perpendicular al plano dado.

Para calcular la recta s:

- Se escogen dos puntos cualesquiera de la recta y calculamos su proyección ortogonal sobre el plano
- Se halla la ecuación de la recta que pasa por dichos puntos



## PUNTOS SIMÉTRICOS

*Punto – Punto* (visto en página 1)

*Punto – Recta* : Calculamos la proyección ortogonal del punto sobre la recta y hacemos el simétrico del punto original sobre este nuevo punto.

*Punto – Plano:* Calculamos la proyección ortogonal del punto sobre el plano y hacemos el simétrico del punto original sobre este nuevo punto.

---

## DISTANCIAS

*Distancia entre dos puntos A y B:* Es el módulo del vector $\vec{AB}$

*Distancia entre punto P y recta r:*

Primera forma: Se calcula la Proyección Ortogonal del punto sobre la recta y se halla la distancia entre ambos puntos

Segunda forma: Se escoge un punto A cualquiera de la recta y:

$$d(P,r) = \frac{|\vec{u}_r \times \vec{AP}|}{|\vec{u}_r|}$$

*Distancia entre punto P y plano* $\pi$ *:*

Primera forma: Se calcula la Proyección Ortogonal del punto sobre el plano y se halla la distancia entre ambos puntos

Segunda forma:

$$d(P,\pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

*Distancia entre dos planos paralelos:*

Se escoge un punto cualquiera de uno de ellos y se aplica la distancia de un punto a un plano

*Distancia entre plano y recta paralela al mismo:*

Se escoge un punto cualquiera de la recta y se aplica la distancia del punto al plano

*Distancia entre dos rectas:*

Si son paralelas, elegimos un punto de una y distancia punto-recta

Si se cruzan, escogemos un punto A y B de cada recta y aplicamos:

$$d(r,s) = h = \frac{V}{A_b} = \frac{|[\vec{AB},\vec{u},\vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$ (ver producto mixto en página siguiente)

# PRODUCTO MIXTO

El **producto mixto** de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual al **producto escalar del primer vector por el producto vectorial de los otros dos**.

El **producto mixto** se representa por [$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$].

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = \vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)$$

El **producto mixto** de tres vectores es igual al determinante que tiene por filas las coordenadas de dichos vectores respecto a una base ortonormal.

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

## Volumen del paralelepípedo

El valor absoluto del **producto mixto** representa el **volumen del paralelepípedo** cuyas aristas son tres vectores que coi en un mismo vértice.

**Ejemplo**

Hallar el **volumen del paralelepípedo** formado por los vectores:

$$\vec{u} = (3,-2,5) \quad \vec{v} = (2,2,-1) \quad w = (-4,3,2)$$

$$V = \left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 91u^3$$

## Volumen de un tetraedro

El **volumen de un tetraedro** es igual a **1/6 del producto mixto**, en valor absoluto.

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

## Propiedades del producto mixto

**1.** El **producto mixto** no varía si se permutan circularmente sus factores, pero cambia de signo si éstos se trasponen.

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = \left[\vec{v},\vec{w},\vec{u}\right] = \left[\vec{w},\vec{u},\vec{v}\right]$$

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = -\left[\vec{v},\vec{u},\vec{w}\right] = -\left[\vec{u},\vec{w},\vec{v}\right] = -\left[\vec{w},\vec{v},\vec{u}\right]$$

**2.** Si **tres vectores** son **linealmente dependientes**, es decir, si son **coplanarios**, **producto mixto vale 0**.