1. Límites y continuidad

Ejercicio 1. *Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 - \cos \pi x$, demostrar que existe un valor $x = a$ positivo y menor que 2, que verifica $f(a) = 3$. Obtener dicho valor con una aproximación de una décima.*

Solución:

- ⋄ La función $f(x)$ es continua para todo x por ser suma de funciones continuas.
- ⋄ En los extremos del intervalo $[0, 3]$:

$$\begin{aligned} &f(0) = -1 < 0 \\ &f(3) = 27 + 9 - \cos 3\pi = 37 \end{aligned}$$

- ⋄ Como consecuencia del teorema de los valores intermedion, f toma en el intervalo $(0, 3)$ todos los valores comprendidos entre -1 y 37. Por consiguiente, existe el punto $a \in (0, 3)$ en que toma el valor 3.

Para calcular el valor de a con la aproximación pedida, buscamos un intervalo de longitud una décima en el que la función cambie de signo. Probamos para $x = 1$ y encontramos:

$$f(1) = 1 + 1 - \cos \pi = 3$$

Ya no necesitamos continuar. Para $a = 1$, $f(1) = 3$.

Ejercicio 2. *Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto y calcular la parte entera de la abscisa del punto de corte.*

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que existe solución de la ecuación:

$$\ln x = e^{-x}$$

o que la función:

$$F(x) = \ln x - e^{-x}$$

se anula para algún valor de x.

Tenemos que:

- ⋄ $F(x)$ es continua en todo su dominio de definición.
- ⋄ Además:

$$\begin{aligned} &F(1) = \ln 1 - e^{-1} < 0 \\ &F(2) = \ln 2 - e^{-2} > 0 \end{aligned}$$

Como consecuencia del teorema de Bolzano existe $x \in (1, 2)$ tal que $F(c) = 0$. Para $x = c$ se cortan ambas curvas. La parte entera de c es igual a 1.

Ejercicio 3. *Dada la función:*

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(b+x) & \text{si } 0 < x < \pi \\ \frac{\pi}{x} & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

calcular a y b de modo que sea continua en todos sus puntos.

Solución:

- En todos los puntos distintos de $x = 0$ y $x = \pi$ la función es continua.
- Para que sea continua en $x = 0$ los límites laterales deben ser iguales:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} a(x-1)^2 = a \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(b+x) = \operatorname{sen} b\end{aligned}$$

  Por consiguiente, debe cumlirse $a = \operatorname{sen} b$

- Para que sea continua en $x = \pi$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to \pi^-} f(x) &= \lim_{x\to \pi^-} \operatorname{sen}(b+x) = \operatorname{sen}(b+\pi) = -\operatorname{sen} b \\ \lim_{x\to \pi^+} f(x) &= \lim_{x\to \pi^+} \frac{\pi}{x} = 1\end{aligned}$$

  Para ue la función sea continua debe cumplirse:

$$-\operatorname{sen} b = 1 \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{3\pi}{2} \pm 2k\pi \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Entonces:

$$a = \operatorname{sen} b = -1$$

Ejercicio 4.

a) *Calcular los siguientes límites:*

(I) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-x\right)$ (II) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+4}{3x+2}\right)^{\frac{2}{x-1}}$

b) *Calcular las asíntotas de la función:*

$$y = \frac{x^3-2x+1}{x^2-1}$$

Solución:

- Calculemos los límites:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-x\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4x+3}-x\right)\left(\sqrt{x^2-4x+3}+x\right)}{\sqrt{x^2-4x+3}+x} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+3-x^2}{\sqrt{x^2-4x+3}+x} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{2x} \\ &= -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+4}{3x+2}\right)^{\frac{2}{x-1}} &= \lim_{x\to 1} e^{\left(\frac{x+4}{3x+2}-1\right)\frac{2}{x-1}} = \lim_{x\to 1} e^{\left(\frac{x+4-3x-2}{3x+2}\right)\frac{2}{x-1}} \\
&= \lim_{x\to 1} e^{\left(\frac{2-2x}{3x+2}\right)\frac{2}{x-1}} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{-4}{3x+2}} \\
&= e^{-\frac{4}{5}}
\end{aligned}$$

⋄ Las posibles asíntotas verticales de la función son $x=-1$ y $x=1$. Lo comprobamos calculando los límites:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x+1}{x^2-1}=\frac{2}{0}=\infty$$

Por tanto $x=-1$ es una asíntota vertical de la función.

En $x=1$ resulta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+2x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-1}{x+1}=1$$

En $x=1$ no hay asíntota vertical. Hay una discontinuidad evitable.

No hay asíntota horizontal pues el límite de la función cuando x tiende a infinito es infinito.

Veamos si hay asíntota oblicua:

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{x^3-x}=1 \\
b &= \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-2x+1}{x^2-1}-x\right) \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2}=0
\end{aligned}$$

La asíntota oblicua es $y=x$.

Ejercicio 5. *Derivar las siguientes funciones:*

a) $y = \text{ artg}\,\frac{1}{x}$

b) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

c) $y=e^{-x}\cos 2x$

d) $y=\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x$

e) $y=\ln e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

Solución:

Para derivar estas funciones tendremos en cuenta que:

$$y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1}{2}\left(\ln(1-x)-\ln(1+x)\right)$$

$$y=\ln e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$$

a) $y' = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \dfrac{-1}{x^2}$

b) $y' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}\right)$

c) $y' = e^{-x}(-1)\cos 2x + e^{-x}(-\operatorname{sen} 2x)\cdot 2$

d) $y' = 2\operatorname{sen} x \cos x - 2\cos x(-\operatorname{sen} x)$

e) $y' = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{x^3}}$

---

2. Derivadas

Ejercicio 1. *Dada la función* $f(x) = 2x^2 + x - 7$*:*

- *Calcular la ecuación de la tangente en el punto de abscisa* -1*.*
- *Calcular la ecuación de la tangente paralela a* $x - 2y + 5 = 0$*.*

Solución:

- La ordenada del punto de tangencia es:

  $$f(-1) = 2(-1)^2 + (-1) - 7 = -6$$

  La derivada es:

  $$f'(x) = 4x + 1$$

  La pendiente de la tangente es la derivada en $x = -1$:

  $$m = 4(-1) + 1 = -3$$

  La ecuación de la tangente es:

  $$y + 6 = -3\cdot(x+1)$$

- La tangente tiene pendiente $\frac{1}{2}$ de modo que en el punto de tangencia ese es el valor de la derivada:

  $$4x + 1 = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad 8x + 2 = 1 \quad\Longrightarrow\quad x = -\frac{1}{8}$$

  La ordenada del punto de tangencia es:

  $$f\left(-\frac{1}{8}\right) = 2\cdot\frac{1}{64} - \frac{1}{8} - 7 = -\frac{229}{32}$$

  La ecuación de la tangente es:

  $$y + \frac{229}{32} = \frac{1}{2}\cdot\left(x + \frac{1}{8}\right)$$

Ejercicio 2.

- *Calcular los valores de a y b para que la función:*

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a\cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

sea continua para todo valor de x.

- *Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior.*

Solución:

- Los únicos posibles puntos de discontinuidad son 0 y π. Para que la función sea continua, deben coincidir los límites laterales en esos puntos:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 3x+2 = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 + 2a\cos x) = 2a$$

Por consiguiente, debe cumplirse que $a = 1$. En el punto π:

$$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^-} (x^2 + 2a\cos x) = \pi^2 - 2$$

$$\lim_{x\to \pi^+} f(x) = \lim_{x\to \pi^+} (ax^2 + b) = \pi^2 + b$$

Es decir $b = -2$.

- Para todos los puntos salvo 0 y π, la derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2\,\text{sen}\, x & \text{si } 0 < x < \pi \\ 2x & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

La función será derivable si en $x = 0$ y en $x = \pi$ coinciden las derivadas por la izquierda y por la derecha.
En $x = 0$:

$$f'(0^-) = 3$$

$$f'(0^+) = 0$$

Por consiguiente, en $x = 0$ la función no es derivable.
En $x = \pi$:

$$f'(\pi^-) = 2\pi$$

$$f'(\pi^+) = 2\pi$$

y la función es derivable.

Ejercicio 3. *Calcular para*

$$f(x) = (x+1)e^{-x}$$

los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.

Solución:

La derivada de la función es:

$$f'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x+1) = -xe^{-x}$$

El signo de la derivada es:

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ + & \big| & - \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Asíu pues, la función es creciente en $(-\infty, 0)$, tiene un máximo en $x = 0$ y es decreciente en $(0, \infty)$.

Ejercicio 4. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}$$

estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.

Solución:

Calculamos las derivadas:

$$f'(x) = \frac{(6x+5)(x+5) - (3x^2+5x-20)}{(x+5)^2} = \frac{3(x^2+10x+15)}{(x+5)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3 \cdot \frac{(2x+10)(x+5)^2 - 2(x+5)(x^2+10x+15)}{(x+5)^4} \\ &= 3 \cdot \frac{(2x+10)(x+5) - 2(x^2+10x+15)}{(x+5)^3} \\ &= 3 \cdot \frac{20}{(x+5)^3} \end{aligned}$$

El signo de esta fracción depende solamente del denominador. La función es convexa para $x < -5$ y es cóncava para $x > -5$. En $x = -5$ hay una asíntota vertical

---

Ejercicio 5. *Se considera la función:*

$$f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$$

Determinar a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$.

Solución:

Calculamos las derivadas:

$$f'(x) = 6x^2 + 24x + a$$

$$f''(x) = 12x + 24$$

El punto de inflexión está en $x = -2$. Esta es la abscisa del punto de tangencia.

La ordenada del punto de tangencia se obtiene sustituyendo $x_0 = -2$ en la ecuación de la tangente:

$$y_0 = 2(-2) + 3 = -1$$

Para calcular a y b sabemos que $f(-2) = -1$ y $f'(-2) = 2$, es decir:

$$-16 + 48 - 2a + b = -1$$

$$24 - 48 + a = 2$$

Resolviendo este sistema resulta $a = 26$ y $b = 19$.

---

3. Continuidad y derivadas

Ejercicio 1. *Dada la función $f(x) = xe^{2x}$ calcular:*

- *Dominio y asíntotas.*
- *Intervalos de crecimiento y decrecimiento y máximos y mínimos relativos.*
- *Intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.*
- *Dibujar su gráfica.*

Solución:

- El dominio está formado por todos los números reales. La recta $y = 0$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$ puesto que, aplicando la regla de l'Hopital:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-2e^{-2x}} = 0$$

- Calculamos la derivada:

$$f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = (1 + 2x)e^{2x}$$

La derivada se anula para $x = -\frac{1}{2}$. El signo de la derivada está dado por el siguiente esquema:

$-$	0	$+$
	$-\frac{1}{2}$	

La función es decreciente en $(-\infty, -\frac{1}{2})$. Tiene un mínimo en $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2e})$ y es creciente en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$.

- Calculemos la derivada segunda:

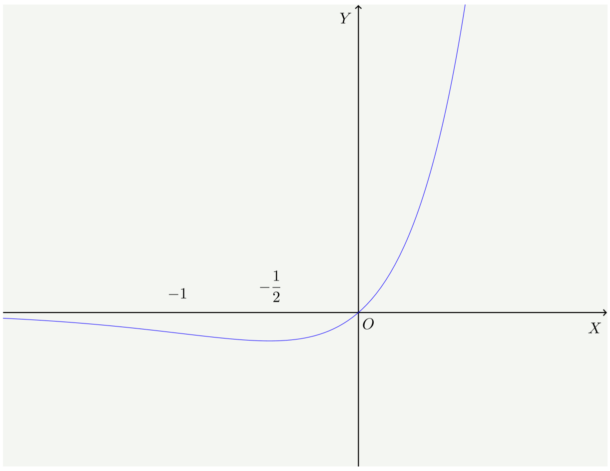
$$f''(x) = 2e^{2x} + 2(1 + 2x)e^{2x} = (4 + 4x)e^{2x}$$

La derivada segunda se anula en $x = -1$. El signo es:

$-$	0	$+$
	-1	

Así pues, la función es convexa en $(-\infty, -1)$, tiene un punto de inflexión en $(-1, -e^{-2})$ y es cóncava en $(-1, \infty)$.

- Con los datos obtenidos, podemos dibujar la siguiente gráfica:



Ejercicio 2. *Obtener los máximos y mínimos relativos de la función:*

$$f(x) = x\,(\ln x)^2$$

siendo $\ln x$ *el logaritmo neperiano de* x*.*

Solución:

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = 1\cdot(\ln x)^2 + 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x = \ln x\,(\ln x + 2)$$

La derivada se anula en $x = 1$ y en $x = e^{-2}$. El signo está dado por:

0		e^{-2}		1	
$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$

La función tiene un máximo en $x = e^{-2}$ y un mínimo en $x = 1$.

Ejercicio 3. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$$

- *Encontrar los puntos de discontinuidad de* f*. Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.*
- *Estudiar si* f *tiene alguna asíntota vertical.*

Solución:

Los puntos de discontinuidad son $x = -1$ y $x = 1$. Los límites en esos puntos son:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \frac{-2}{0} = \infty$$

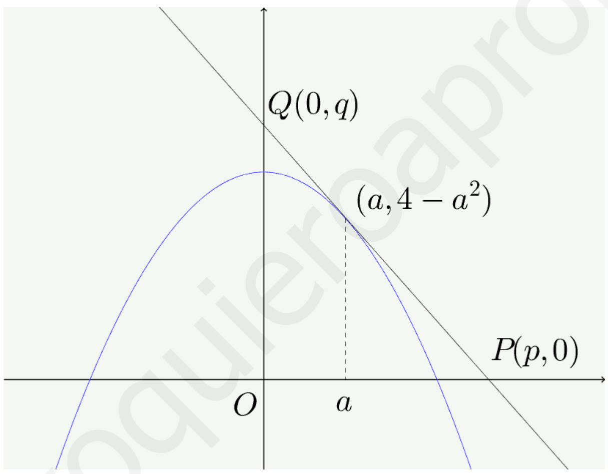
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \lim_{x\to 1} \frac{x^5(1 - x^3)}{(1 + x^3)(1 - x^3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^5}{1 + x^3} = \frac{1}{2}$$

El segundo límite es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. La hemos resuelto simplificando la fracción; también podríamos haber aplicado la regla de l'Hopital. En $x = -1$ hay un infinito de la función y en $x = 1$, puesto que existe el límite, hay una discontinuidad evitable.

Hay una asíntota vertical $x = -1$.

Ejercicio 4. *¿En qué punto de la parábola $y = 4 - x^2$ la tangente forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima?*

Solución:



La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = a$ es:

$$y - 4 + a^2 = -2a(x - a) \qquad \text{o bien} \qquad y = -2ax + a^2 + 4$$

Los puntos de intersección de esta recta con los ejes son:

$$P\left(\frac{a^2 + 4}{2a}, 0\right), \qquad Q\left(0.a^2 + 4\right)$$

de modo que el área del triángulo OPQ es:

$$S = \frac{(a^2 + 4)^2}{4a}$$

Si estae área debe ser mínima, la derivada será cero:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{2(a^2 + 4) \cdot 2a \cdot 4a - 4(a^2 + 4)^2}{16a^2} = \frac{4(a^2 + 4)[4a^2 - (a^2 + 4)]}{16a^2} = \frac{4(a^2 + 4)(3a^2 - 4)}{16a^2}$$

e igualando la derivada a cero resulta $a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ejercicio 5. *Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ solo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número m. Justifica la respuesta indicando qué teoremas se usan.*

Solución:

Sea la función $F(x) = 4x^5 + 3x + m$ continua y derivable para todo x.

Puesto que:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$$

la función toma valores positivos y negativos. De acuerdo con el teorema de Bolzano, existe al menos un punto c en el que toma el valor cero. Este número c es solución de la ecuación.

De acuerdo con el teorema de Rolle, entre dos ceros de la función debería haber al menos un cero de la derivada. Puesto que la derivada

$$F'(x) = 20x^4 + 3$$

es siempre mayor que cero, no puede haber dos ceros de la función. En consecuencia, la solución de la ecuación es única.

---

4. Integral indefinida

Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int (2x-1)^3 \, \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \sqrt{3x-1} \, \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \left(1-\sqrt{x}\right)^2 \, \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{3+x^2} \, \mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \ln(2x) \, \mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \, \mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1} \, \mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int x e^{-x} \, \mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-4}} \, \mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8} \, \mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+4x+5} \, \mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}} \, \mathrm{d}x$
14. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \, \mathrm{d}x$
15. $\displaystyle\int x^3 e^{x^2} \, \mathrm{d}x$

Solución

1. $$\int (2x-1)^3 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-1)^4}{4} + C$$

2. $$\int \sqrt{3x-1}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2\sqrt{(3x-1)^3}}{9} + C$$

3. $$\int \left(1-\sqrt{x}\right)^2\ \mathrm{d}x = \int \left(1+x-2\sqrt{x}\right)\ \mathrm{d}x = 1 + \frac{x^2}{2} - 2\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + C$$

4. $$\int \frac{1}{3+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \mathrm{artg}\ \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

5. Por partes:

$$u = \ln 2x \qquad \mathrm{d}u = \frac{2}{2x}\ \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \ \mathrm{d}x \qquad v = x$$

$$\int \ln(2x)\ \mathrm{d}x = x\ln 2x - \int x\cdot\frac{2}{2x}\ \mathrm{d}x = x\ln 2x - x + C$$

6. $$\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\ \mathrm{arsen}\, 3x + C$$

7. Con el cambio de variable:

$$t = \cos x$$
$$\mathrm{d}t = -\operatorname{sen} x\ \mathrm{d}x$$
$$-\ \mathrm{d}t = \operatorname{sen} x\ \mathrm{d}x$$

$$\int \cos^4 x \operatorname{sen} x\ \mathrm{d}x = -\int t^4\ \mathrm{d}t = -\frac{t^5}{5} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + C$$

8. Con el cambio de variable:

$$t = e^x$$
$$\mathrm{d}t = e^x\ \mathrm{d}x = t\ \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$$

$$\int \frac{1}{e^x+1}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{t+1}\cdot\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \int \frac{1}{(t+1)t}\ \mathrm{d}t$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(t+1)t} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t} \quad\Longrightarrow\quad A=-1,\ B=1$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{1}{e^x+1}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{(t+1)t}\ \mathrm{d}t = \int \left(\frac{-1}{t+1} + \frac{1}{t}\right) = -\ln(e^x+1) + \ln e^x + C = \ln\frac{e^x}{e^x+1} + C$$

9. Por partes:

$$u = x \qquad \mathrm{d}u = \ \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = e^{-x}\ \mathrm{d}x \qquad v = -e^{-x}$$

$$\int xe^{-x}\ \mathrm{d}x = -xe^{-x} + \int e^{-x}\ \mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

10. Puesto que el numerador es igual a la derivada del radicando salvo una constante:

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-4}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+2x-4}+C$$

11. Hacemos la división y obtenemos de cociente 1 y de resto $5x+4$ de modo que:

$$\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}\,\mathrm{d}x = \int \left(1+\frac{5x+4}{x^2-2x-8}\right)\,\mathrm{d}x$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{5x+4}{x^2-2x-8} = \frac{4}{x-4} + \frac{1}{x+2}$$

Sustituyendo:

$$\int \left(1+\frac{5x+4}{x^2-2x-8}\right)\,\mathrm{d}x = \int \left(1+\frac{4}{x-4}+\frac{1}{x+2}\right)\,\mathrm{d}x = x + 4\ln|x-4| + \ln|x-2| + C$$

12. En este caso, el denaminador no tiene raíces:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4-6}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{6}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - 3\int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - 3\,\mathrm{artg}\,(x+2) + C
\end{aligned}$$

13. Descomponemos en suma de dos integrales:

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

La segunda es inmediata de tipo arcoseno. La primera la calculamos mediante el cambio de variable:

$$\begin{aligned}
t^2 &= 4-x^2 \\
2t\,\mathrm{d}t &= -2x\,\mathrm{d}x \\
x\,\mathrm{d}x &= -t\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{t} = -t + C = -\sqrt{4-x^2}+C$$

Finalmente:

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{4-x^2} + 2\,\mathrm{arsen}\,\frac{x}{2} + C$$

14. Con el cambio;

$$\begin{aligned} t &= e^x \\ \mathrm{d}t &= e^x \ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

se obtiene:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t = \operatorname{arsen} t + C = \operatorname{arsen} e^x + C$$

15. Con el cambio de variable:

$$\begin{aligned} t &= x^2 \\ \mathrm{d}t &= 2x \ \mathrm{d}x \\ x \ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{x^2} \ \mathrm{d}x &= \int x^2 e^{x^2} x \ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int t e^t \ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} \int t \ \mathrm{d}(e^t) \\ &= \frac{1}{2} \left(t e^t - e^t \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2} \right) + C \end{aligned}$$

5. Segundo examen de integrales

Ejercicio 1. *Calcular:*

(a) $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2-2x+4} \, \mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int x \cos 3x \ \mathrm{d}x$

Solución:

La primera función a integrar es una función racional cuyo denominador no tiene raíces reales. Es, por consiguiente, la suma de funciones logaritmo y arcotangente:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-2}{x^2-2x+4} \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-2x+4} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-2+2-4}{x^2-2x+4} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+4} \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int \frac{2}{x^2-2x+4} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+4) - \int \frac{1}{(x-1)^2+3} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+4) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{artg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

La segunda integral se hace por partes:

$$\begin{aligned} u &= x & \mathrm{d}u &= \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= \cos 3x \ \mathrm{d}x & v &= \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x\cos 3x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\,x\operatorname{sen}3x-\frac{1}{3}\int\operatorname{sen}3x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}\,x\operatorname{sen}3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C\end{aligned}$$

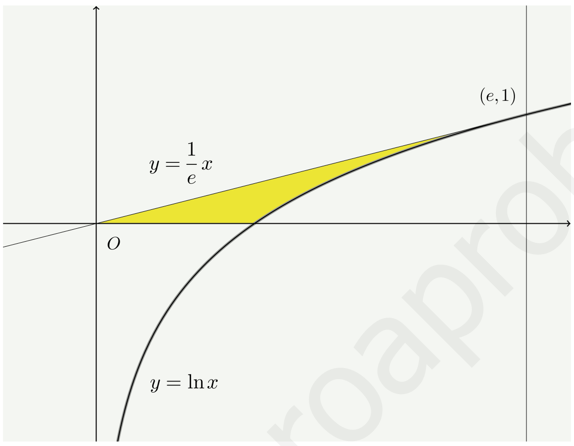
Ejercicio 2. *Representar la región del plano limitada por $y=\ln x$, su recta tangente en $x=e$ y el eje OX. Calcular su área.*

Solución:

La ecuación de la recta tangente es:

$$y-1=\frac{1}{e}(x-e)\quad\Longrightarrow\quad y=\frac{1}{e}\,x$$

que pasa por el origen de coordenadas.

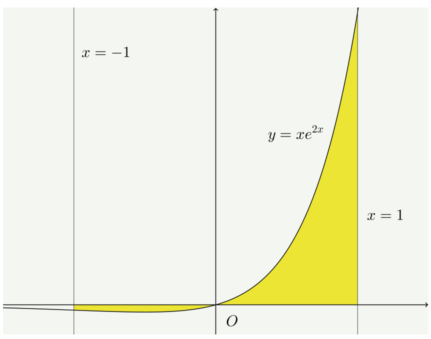


El área pedida se puede calcular como la diferencia del área del triángulo y del area bajo la curva $y=\ln x$ entre 1 y e:

$$S=\frac{1}{2}\,e\cdot 1-\int_1^e\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{e}{2}-1$$

Ejercicio 3. *Calcular el área comprendida por la curva $y=xe^{2x}$, el eje de abscisas y las rectas $x=-1$ y $x=1$.*

Solución:



Tenemos que calcular por separado las integrales de -1 a 0 y de 0 a 1. Calculamos, en primer lugar la integral indefinida:

$$\int xe^{2x}\,\mathrm{d}x$$

Por partes:

$$\begin{aligned} u &= x & \mathrm{d}u &= \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= e^{2x}\,\mathrm{d}x & v &= \frac{1}{2}e^{2x} \end{aligned}$$

$$\int xe^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,xe^{2x} - \frac{1}{4}\,e^{2x} + C$$

Entonces:

$$\int_{-1}^{0} xe^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,xe^{2x} - \frac{1}{4}\,e^{2x}\right]_{-1}^{0} = \frac{3}{4e^2} - \frac{1}{4}$$

$$\int_{0}^{1} xe^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,xe^{2x} - \frac{1}{4}\,e^{2x}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{4} + \frac{e^2}{4}$$

El área total es igual a la primera integral cambiada de signo más la segunda:

$$S = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2} + \frac{1}{4} + \frac{e^2}{4} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4e^2} + \frac{e^2}{4}$$

Ejercicio 4. *Calcular:*

(a) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x}(x-1)\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

Solución:

(a) Mediante el cambio de variable:

$$\begin{aligned} t &= x^2 - 2x \\ \mathrm{d}t &= 2x - 2\,\mathrm{d}x = 2(x-1)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{x^2-2x}(x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-2x)^3} + C$$

(b) Con el cambio de variable:

$$\begin{aligned} t &= \ln x \\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \int (1+t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{(1+t)^3}{3} + C = \frac{(1+\ln x)^3}{3} + C$$

Ejercicio 5. *Sea*

$$F(x) = \int_1^{x^2} \ln t \, dt$$

Calcular $F'(e)$.

Solución:

Por el teorema fundamental del cálculo integral:

$$F'(x) = 2x \ln x^2$$

Por consiguiente:

$$F'(e) = 2e \ln e^2 = 4e$$

---

6. Examen global de cálculo

Ejercicio 1. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

se pide:

(*a*) *Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$.*

(*b*) *Calcular $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$.*

Solución:

(*a*) La ordenada del punto de tangencia es $y_0 = 0$. Para hallar la pendiente de la tangente hacemos la derivada:

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x}{(x^2+1)^2}$$

La pendiente es:

$$m = f'(0) = 1$$

De modo que la ecuación de la tangente es $y = x$.

(*b*) Efectuamos la división y resulta:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x = x - \operatorname{artg} x + C$$

Ahora calculamos la integral definida:

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \big[x - \operatorname{artg} x\big]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Ejercicio 2. *Dadas las funciones:*

$$f(x) = \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2 - 3}} \ ; \quad g(x) = (\ln x)^x \ ; \quad h(x) = \operatorname{sen}(\pi - x)$$

se pide:

(a) *Hallar el dominio de $f(x)$ y el $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.*

(b) *Calcular $g'(e)$.*

(c) *Calcular, en el intervalo $[0, 2\pi]$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y los extremos relativos de $h(x)$.*

Solución:

(a) Hay que tener en cuenta que $x + 1$ debe ser mayor que cero puesto que es el argumento de una función logaritmo. Además $x^2 - 3$ también debe ser mayor que cero puesto que es el argumento de una raíz cuadrada y, además, está en el denominador. Entonces, para calcular el dominio de $f(x)$ debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x^2 - 3 > 0 \end{cases}$$

La solución es $x > \sqrt{3}$.

Comparando las funciones potenciales o mediante la regla de l'Hopital se ve fácilmente que el límite es igual a 3.

(b) Escribimos la función como:

$$g(x) = (\ln x)^x = e^{x \ln \ln x}$$

La derivada de esta función es:

$$g'(x) = e^{x \ln \ln x}\left(\ln \ln x + \frac{1}{\ln x}\,\frac{1}{x}\,x\right) = (\ln x)^x \left(\ln \ln x + \frac{1}{\ln x}\right) \quad \Longrightarrow \quad g'(e) = 1$$

(c) Las intersecciones con el eje de abscisas son:

$$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 + 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

En $[0, 2\pi]$, las soluciones son $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Los extremos relativos se obtienen resolviendo la ecuación:

$$h'(x) = -\cos(\pi - x) = \cos x$$

En $[0, 2\pi]$ el coseno es cero en $x = \frac{\pi}{2}$ y en $x = \frac{3\pi}{2}$.

Ejercicio 3.

(a) *Hallar los valores de a y λ para que la función:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda x^2} - 1}{3x^2} & \text{si } x > 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

sea continua.

(*b*) *Calcular la integral* $\displaystyle\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\,\mathrm{d}x$

Solución:

(*a*) Para que la función sea continua en $x=0$ debe cumplirse que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

Puesto que:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2 \qquad \text{y} \qquad f(0)=a$$

está claro que debe ser $a=2$. También debe ser igual a 2 el límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\lambda x^2}-1}{3x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\lambda x^2}{3x^2} = \frac{\lambda}{3} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 6$$

(*b*) Hacemos el cambio:

$$t = x^2 \qquad \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$$

Cuando $x=1$, $t=1$ y cuando $x=3$, $t=9$. Entonces:

$$\begin{aligned}\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_1^9 \sqrt{4+5t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2\sqrt{(4+5t)^3}}{3}\right]_1^9 \\ &= \frac{343}{15} - \frac{27}{15} = \frac{316}{15}\end{aligned}$$

Ejercicio 4. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{3x^2+5x-20}{x+5}$$

se pide:

(*a*) *Estudiar y obtener las asíntotas.*

(*b*) *Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.*

(*c*) *Representar gráficamente la función.*

Solución:

(*a*) La asíntota vertical es $x=-5$. La asíntota oblicua puede obtenerse calculando los límites:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x-20}{x(x+5)} = 3$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2+5x-20}{x+5} - 3x\right) = -10$$

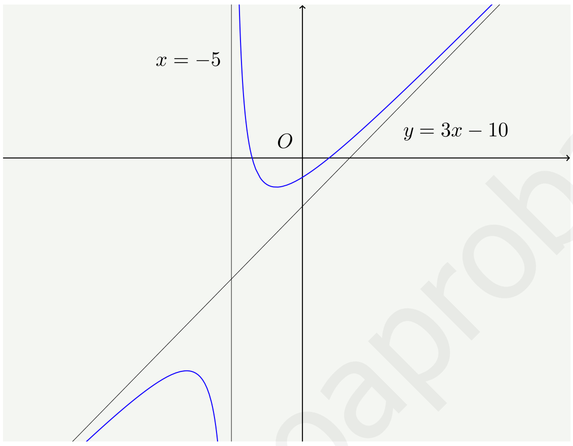
También podría calcularse como el cociente de dividir $3x^2+5x-20$ entre $x+5$.

(b) Calculemos las derivadas:

$$y' = \frac{(6x+5)(x+5) - (3x^2+5x-20)}{(x+5)^2} = \frac{3x^2+30x+45}{(x+5)^2}$$
$$y'' = \frac{(6x+30)(x+5)^2 - 2(x+5)(3x^2+30x+45)}{(x+5)^4} = \frac{(6x+30)(x+5) - 2(3x^2+30x+45)}{(x+5)^3}$$
$$= \frac{60}{(x+5)^3}$$

La derivada segunda es positiva y la función cóncava para $x > -5$, es negativa y la función convexa para $x < -5$. En $x = 5$ no existe la función.

(c) Se trata de una hipérbola:



Ejercicio 5.

(a) *Obtener el valor de a para que:*

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-3}{x^2+3}\right)^{ax^2} = 4$$

(b) *Hallar a, b y c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $(1, 2)$ un máximo relativo y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión.*

Solución:

(a) Utilizando la aproximación para los límites del tipo 1^∞:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-3}{x^2+3}\right)^{ax^2} = \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x^2-3}{x^2+3}-1\right)(ax^2)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-6ax^2}{x^2+3}} = e^{-6a}$$

Puesto que este límite debe ser igual a 4:

$$e^{-6a} = 4 \quad\Longrightarrow\quad -6a = \ln 4 \quad\Longrightarrow\quad a = -\frac{\ln 4}{6} = -\frac{2\ln 2}{6} = -\frac{\ln 2}{3}$$

(*b*) Las derivadas de la función son:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b\,; \qquad y''(x) = 6x + 2a$$

Las condiciones son:

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \\ f'(1) &= 0 \\ f''(3) &= 0 \end{aligned}$$

lo que conduce al sistema:

$$\begin{cases} 1 + a + b + c = 2 \\ 3 + 2a + b = 0 \\ 18 + 2a = 0 \end{cases}$$

que tiene como solución $a = -9$, $b = 15$ y $c = -5$.

---

7. Matrices y sistemas

Ejercicio 1. *De las siguientes afirmaciones señalar las que sean verdaderas:*

(a) *Si se multiplica una fila de un determinante por* 3*, el determinante queda multiplicado por* 3*.*

(b) *Si A es una matriz 4×2 y B es 3×4 podemos hacer el producto BA.*

(c) *Si se intercambian dos filas de un determinante, el valor del determinante no cambia.*

(d) *Si una matriz 3×3 tiene rango 2, su determinante es cero.*

(e) *En algunas matrices 4×3, las cuatro filas son independientes.*

(f) *El determinante de la matriz unidad es igual al orden del determinante.*

(g) *La inversa de la matriz unidad es la matriz unidad.*

(h) *Si el determinante es cero, la matriz no tiene inversa.*

(i) *Si multiplicamos una matriz por su inversa, el resultado es la matriz cero.*

Son verdaderas las afirmaciones en los apartados (a), (b), (d), (g) y (h).

Ejercicio 2. *Calcular el rango de la matriz:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\text{rango}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4\\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6\\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8\end{bmatrix} \qquad \begin{matrix}F_2 \to F_2 + F_1\\ F_4 \to F_4 + F_1\end{matrix}$$

$$= \text{rango}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6\\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6\\ 8 & 2 & 6 & 2 & 0 & 12\end{bmatrix} \qquad \begin{matrix}F_2 = F_3\\ F_4 = 2F_2\end{matrix}$$

$$= \text{rango}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

$$= 2$$

Ejercicio 3. *Calcular el siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & -3 & 0\\ 3 & 5 & -2 & 1\\ -1 & 3 & -1 & -1\\ 4 & 0 & -1 & 3\end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & -3 & 0\\ 3 & 5 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -1 & -1\\ 4 & 0 & -1 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & -1 & -3 & 0\\ 3 & 5 & -2 & 1\\ 2 & 8 & -3 & 0\\ -5 & -15 & 5 & 0\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}2 & -1 & -3\\ 2 & 8 & -3\\ -5 & -15 & 5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & -1 & -3\\ 0 & 9 & 0\\ -5 & -15 & 5\end{vmatrix} = -45$$

Ejercicio 4.

(a) *Demuestra que la matriz*

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

verifica una ecuación del tipo $A^2+\alpha A+\beta I = 0$, *determinando* α *y* β *(*I *denota la matriz identidad).*

(b) *Utiliza el apartado anterior para calcular la inversa de* A.

Solución:

Calculamos la matriz A^2:

$$A^2 = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}$$

La igualdad $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$ se escribe:

$$\begin{bmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

que equivale al sistema:

$$\begin{cases} 5+2\alpha+\beta=0 \\ 4+\alpha=0 \\ 4+\alpha=0 \\ 5+2\alpha+\beta=0 \end{cases}$$

que tiene como solución $\alpha=-4$, $\beta=3$.

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} &A^2-4A+3I=0 \\ &A^2-4A=-3I \\ &4A-A^2=3I \\ &A(4I-A)=3I \\ &A\left(\frac{4}{3}I-\frac{1}{3}A\right)=I \end{aligned}$$

Por consiguiente, la matriz inversa de A es:

$$A^{-1}=\frac{4}{3}I-\frac{1}{3}A=\frac{4}{3}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}$$

Ejercicio 5. *Dada la matriz:*

$$A=\begin{bmatrix}1&0&m\\m&1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

(*a*) *Hallar los valores de m para los que la matriz no tiene inversa.*

(*b*) *Hallar su inversa para $m=1$.*

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&m\\m&1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=m^2-m-2$$

El determinante es cero para:

$$m=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}\qquad\Longrightarrow\qquad m=-1,\ m=2$$

por consiguiente, existe la matriz inversa para $m\neq-1$ y $m\neq 2$.

Para $m=1$, por la fórmula obtenida $|A|=-2$. Además:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}\quad\Longrightarrow\quad \text{adj } A=\begin{bmatrix}-2&2&0\\1&-2&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}\quad\Longrightarrow\quad \text{adj } A^t=\begin{bmatrix}-2&1&-1\\2&-2&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

Y la matriz inversa es:

$$A^{-1}=\frac{-1}{2}\begin{bmatrix}-2&1&-1\\2&-2&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

Ejercicio 6. *Estudiar la compatibilidad y resolver el sistema:*

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 3 \\ -x - 5y + z &= 0 \\ 3x + \;\; y - z &= 6 \end{aligned}$$

Solución:

Calculamos el rango de las matrices:

$$\begin{aligned} \text{rango } A = \text{rango} &\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad F_2 \to F_2 + F_1,\ F_3 \to F_3 - F_1 \\ = \text{rango} &\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\ = 2 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rango } A^* = \text{rango} &\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{solo 2 de las 3 primeras columnas son independientes} \\ = \text{rango} &\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} \qquad F_2 \to F_2 + F_1,\ F_3 \to F_3 - F_1 \\ = \text{rango} &\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ = 2 & \end{aligned}$$

El sistema es por tanto, compatible, puesto que el rango de las dos matrices es el mismo, e indeterminado puesto que el rango es menor que el número de incógnitas.

Puesto que el rango es 2, solamente hay 2 ecuaciones independientes. Elegimos por ejemplo las dos primeras:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 3 \\ -x - 5y + z &= 0 \end{aligned}$$

Llamando $z = t$ y pasando esta incógnita al segundo miembre resulta:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 3 + t \\ -x - 5y &= -t \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema por la regla de Cramer se obtiene finalmente:

$$x = \frac{2t + 15}{7}; \quad y = \frac{t - 3}{7}; \quad z = t$$

Ejercicio 7. *Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro a y resolverlo para $a = 2$:*

$$\begin{aligned} ax + 2y + 6z &= 0 \\ 2x + ay + 4z &= 2 \\ 2x + ay + 6z &= a - 2 \end{aligned}$$

Solución:

Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\,(a^2-4)$$

donde hemos hecho la transformación $F_3 \to F_3 - F_2$. El determinante es cero cuando a^2-4 es cero, esto es, para $a=-2$ y $a=2$. Pueden darse los siguientes casos:

- ⋄ $a \neq -2,\ a \neq 2$. En este caso rango A = rango $A^* = 3$ y el sistema es compatible determinado.
- ⋄ $a=-2$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\begin{aligned} \text{rango } A^* &= \text{rango} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{bmatrix} && \text{suprimiendo una columna de la matriz } A \\ &= \text{rango} \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix} && \text{sumando la primera fila a las otras dos} \\ &= \text{rango} \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 0 & 10 & 2 \\ 0 & 12 & -4 \end{bmatrix} \\ &= 3 \end{aligned}$$

  y, por consiguiente, el sistema es incompatible.

- ⋄ $a=2$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango } A^* = \text{rango} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

  El sistema es compatible indeterminado puesto que el rango de las dos matrices es 2.

Vamos a resolver el sistema para $a=2$. Puesto que el rango de las dos matrices es 2 solamente hay 2 ecuaciones independientes. El sistema se reduce a:

$$\begin{aligned} 2x+2y+6z &= 0 \\ 2x+2y+4z &= 2 \end{aligned}$$

No podemos tomar z como parámetro puesto que quedaría el determinante de la matiz de coeficientes igual a cero. Tomemos $y=t$ como parámetro:

$$\begin{aligned} 2x+6z &= -2t \\ 2x+4z &= 2-2t \end{aligned}$$

Resolviendo por la regla de Cramer resulta:

$$x = 3-t; \quad y = t; \quad z = -1$$

8. Matrices y sistemas

Ejercicio 1. *Sabiendo que*

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

calcular los siguientes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3x & y & 2z \\ 6 & 3 & 10 \end{vmatrix}$ $\qquad$ (b) $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2-x & 2-y & -z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3x & y & 2z \\ 6 & 3 & 10 \end{vmatrix} &= 3\cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & y & z \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} && \text{(sacando factor común)} \\
&= -3\cdot 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} && \text{(permutando filas)} \\
&= -6
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2-x & 2-y & -z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} && \text{(sumando la primera fila a la segunda)} \\
&= 3 \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} && \text{(sacando factor común)} \\
&= 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} && \text{(por la propiedad distributiva)} \\
&= 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} && \text{(filas iguales)} \\
&= 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} && \text{(restando la segunda fila a la tercera)} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Ejercicio 2. *Dado el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\left\{ \begin{array}{rl} 3x + 2y + (a-1)z & = 1 \\ -x + ay + z & = 0 \\ 2x + y - 2z & = 3 \end{array} \right.$$

se pide:

(a) *Discutir las soluciones según los valores de a.*

(b) *Hallar la solución del sistema para $a = 1$.*

Solución:

(a) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & a-1 \\ -1 & a & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6a - (a-1) + 4 - 2a(a-1) - 3 - 4 = -2a^2 - 5a - 2$$

El determinante se anula para:

$$-2a^2 - 5a - 2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad 2a^2 + 5a + 2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad a = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}$$

es decir, para $a = -\frac{1}{2}$ y $a = -2$.

Pueden darse los siguientes casos:

◇ $a \neq -\frac{1}{2}$ y $a \neq -2$.
El rango de la matriz de coeficientes es 3. El rango de la matriz ampliada también será 3 (no puede ser mayor puesto que solo hay tres filas). El sistema es compatible determinado.

◇ $a = -\frac{1}{2}$.
El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Hemos suprimido una fila porque sabemos que en le matriz de coeficientes no puede haber tres columnas independientes. Vemos que el rango de la matriz de coeficientes es 2. Sumando la segunda fila a la tercera, el rango de la matriz ampliada resulta ser:

$$\text{rango } A^* = \text{rango}\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = 3$$

El sistema es incompatible.

◇ $a = -2$.
El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango}\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -7 & -5 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

Puesto que el rango de la matriz de coeficientes es 2, el sistema es también incompatible.

(b) Para $a = 1$ el sistema es compatible determinado y se puede resolver por la regla de Cramer. El determinante de la matriz de coeficientes es -9. Entonces:

$$x = \frac{-1}{9}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{9}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

$$y = \frac{-1}{9}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{9}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

$$z = \frac{-1}{9}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{-1}{9}\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{4}{3}$$

Ejercicio 3. *Dado el sistema homogéneo de ecuaciones:*

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x - 4y + kz = 0 \end{cases}$$

se pide:

(a) *Determinar para qué valores del parámetro k el sistema tiene soluciones distintas de la solución trivial.*

(b) *Resolverlo para el caso $k = 3$.*

Solución:

(a) Para que el sistema tiene soluciones distintas de la solución trivial el determinante de la matriz de coeficientes debe ser igual a cero. En caso contrario el rango de ambas matrices sería 3 y el sistema tendría únicamente la solución trivial. Por consiguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & k \end{vmatrix} = -k + 8 + 2k - 1 + 8 - 2k^2 = -2k^2 + k + 15 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son $k = -\frac{5}{2}$ y $k = 3$. Para estos valores de k, el sistema tiene soluciones distintas de la solución trivial.

(b) Para el caso $k = 3$ las matrices del sistema tienen rango igual a 2. Solamente hay dos ecuaciones independientes. Tomando las dos primeras el sistema queda:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Tomamos como parámetro $z = t$:

$$\begin{cases} x + 3y = t \\ 2x - y = -2t \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son $\left(-\frac{5}{7}\,t, \frac{4}{7}\,t, t\right)$.

Ejercicio 4. *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix} \quad ; \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{bmatrix}$$

se pide:

(a) *Estudiar el rango de la matriz B en función de a.*

(b) *Para $a = 0$, calcular la matriz X que verifica $AX = B$.*

Solución:

(*a*) Calculamos el determinante formado por la primera, segunda y cuarta columna:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & -8 \\ 3 & 2-a & 3 \end{vmatrix} = -36 + 4(2-a) + 24 - 18 + 32(2-a) - 6 = -36a + 36$$

este determinante se anula para $a = 1$. Entonces tenemos:

- ⋄ Para $a \neq 1$ el rango de la matriz es 3.
- ⋄ Para $a = 1$ tenemos que calcular el rango de:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Puesto que entre la primera y la segunda y la cuarta solamente puede haber dos independientes, suprimimos la cuarta y obtenemos:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -14 & 0 & -10 \\ 7 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 2$$

(*b*) Para $a = 0$ la matriz A es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Su determinante es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

Puesto que la matriz A tiene inversa, la calculamos para poder despejar la matriz X.

$$\text{adj } A = \text{adj } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Así:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

9. Geometría

Ejercicio 1. *Escribe las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos* $A(1,-1,2)$*,* $B(2,0,-1)$ *y* $C(-3,1,0)$*.*

Solución:

Pueden tomarse como vectores directores $\overrightarrow{AB}=(1,1,-3)$ y $\overrightarrow{AC}=(-4,2,-2)$ o, mejor, la mitad de éste último $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=(-2,1,-1)$.

Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x=1+s-2t \\ y=-1+s+t \\ z=2-3s-t \end{cases}$$

La ecuación en forma de determinante es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ y+1 & 1 & 1 \\ z-2 & -3 & -1 \end{vmatrix}=0$$

y desarrollando el determinante obtenemos la ecuación implícita:

$$\begin{aligned} &2(x-1)+7(y+1)+3(z-2)=0 \\ &2x+7y+3z-1=0 \end{aligned}$$

Ejercicio 2. *Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta:*

$$r:\begin{cases} x+y-2z=3 \\ 3x-y+z=0 \end{cases}$$

Solución:

Calculamos el vector director:

$$\vec{u}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(-1,-7,-4)$$

Necesitamos ahora un punto de la recta. Para $x=0$ la ecuación queda:

$$\begin{cases} y-2z=3 \\ -y+z=0 \end{cases}$$

y resolviendo obtenemos el punto $P(0,3,-3)$. Las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x=t \\ y=3+7t \\ z=-3+4t \end{cases}$$

Ejercicio 3. *Calcular el valor de m para que los puntos $A(0,1,2)$, $B(1,0,3)$, $C(1,m,1)$ y $D(m,-1,2m)$ pertenezcan a un mismo plano.*

Solución:

Para que los puntos sean coplanarios, los vectores $\overrightarrow{AB} = (1,-1,1)$, $\overrightarrow{AC} = (1,m-1,-1)$ y $\overrightarrow{AD} = (m,-2,2m-2)$ deben ser linealmente dependientes. Entonces:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m-1 & -1 \\ m & -2 & 2m-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & -2 \\ m & m-2 & m-2 \end{vmatrix} = m(m-2)+2(m-2) = m^2-4 = 0$$

Los valores de m que hacen que los puntos sean coplanarios son $m=-2$ y $m=2$.

Ejercicio 4. *Sean las rectas:*

$$r:\ \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2} \qquad s:\begin{cases} x-3y-5=0 \\ x-3z-8=0 \end{cases}$$

Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

Solución:

Calculamos un vector director de la recta s:

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (9,3,3) = 3(3,1,1)$$

Los vectores directores de las dos rectas son vectores directores del plano que se pide. Además, por estar contenida en el plano, cualquier punto de la recta r también pertenece al plano. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y-1 & -1 & 1 \\ z-2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante se obtiene:

$$\begin{aligned} &-3x+5(y-1)+4(z-2)=0 \\ &-3x+5y+4z-13=0 \end{aligned}$$

Ejercicio 5. *Calcular la ecuación del plano perpendicular a la recta:*

$$\begin{cases} x = 3-t \\ y = 2-5t \\ z = 2 \end{cases}$$

que pasa por el punto $P(-1,2,-1)$.

Solución:

Puede tomarse como vector normal al plano el vector director de la recta. La ecuación es:

$$\begin{aligned} &-3x+5(y-1)+4(z-2)=0 \\ &-x-5y+9=0 \end{aligned}$$

Ejercicio 6. *Calcular la ecuación de una recta que pasa por el punto $P(1,-1,2)$ y es paralela a los planos $\pi:\ 2x-5y+2z-1=0$ y $\pi':\ 3x+y-z+2=0$.*

Solución:

Los vectores normales a los planos son también vectores perpendiculares a la recta. Podemos tomar como vector director de la recta el producto vectorial de estos vectores:

$$\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -5 & 2\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=(3,8,17)$$

La ecuación de la recta es:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{8}=\frac{z-2}{17}$$

Ejercicio 7. *Dadas las rectas:*

$$r\equiv\begin{cases}x-ay=2\\ ay+z=1\end{cases}\qquad s\equiv\begin{cases}x-z=1\\ y+z=3\end{cases}$$

discutir la posición relativa de las dos rectas según los valores del parámetro a.

Solución:

Podríamos calcular los vectores directores de las rectas como producto vectorial pero, en este caso, resulta más sencillo escribir las ecuaciones paramétricas:

$$r:\ \begin{cases}x=2+at\\ y=t\\ z=1-at\end{cases}\qquad s:\ \begin{cases}x=1+t\\ y=3-t\\ z=t\end{cases}$$

Así, la recta r está definida mediante el punto $P(2,0,1)$ y el vector $\vec{u}=(a,1,-a)$. La recta s está definida por el punto $Q(1,3,0)$ y el vector $\vec{v}=(1,-1,1)$.

Es evidente que las rectas no pueden ser paralelas. Las dos rectas se cortan o se cruzan dependiendo del rango del sistema de vectores $\{\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\}$. Calculamos el determinante que tiene como columnas estos vectores:

$$\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ -3 & 1 & -1\\ 1 & -a & 1\end{vmatrix}=4a$$

Si $a=0$ las rectas se cortan. En caso contrario se cruzan.

Ejercicio 8. *Dados el punto $P(1,0,-1)$, el plano $\pi\equiv 2x-y+z+1=0$, y la recta:*

$$r\equiv\begin{cases}-2x+y-1=0\\ 3x-z-3=0\end{cases}$$

se pide determinar la ecuación del plano que pasa por P, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π.

Solución:

En forma paramétrica, la ecuación de la recta r es:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$$

y tiene, por tanto, como vector director $\vec{u} = (1, 2, 3)$, Éste será un vector director del plano que debemos calcular. El otro es el vector normal al plano dado $\vec{n} = (2, -1, 1)$.

La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y & -1 & 2 \\ z+1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

y desarrollando el determinante:

$$\begin{aligned} &-5(x-1) - 5y + 5(z+1) = 0 \\ &-x - y + z + 2 = 0 \end{aligned}$$

10. Segundo examen de Geometría

Ejercicio 1. *Dados los puntos $A(1,3,5)$ y $B(-2,4,1)$ hallar las coordenadas del punto C perteneciente al plano OXY de forma que los puntos A, B y C estén alineados.*

Solución:

Esto es lo mismo que calcular el punto de intersección de la recta PQ con el plano $z=0$. Calculamos el vector director:

$$\overrightarrow{PQ}=(-3,1,-4)$$

La ecuación de la recta PQ es:

$$\begin{cases} x=1-3t \\ y=3+t \\ z=5-4t \end{cases}$$

La intersección con el plano $z=0$ es la solución del sistema:

$$\begin{cases} z=0 \\ x=1-3t \\ y=3+t \\ z=5-4t \end{cases}$$

De la primera ecuación y la última resulta $t=\frac{5}{4}$. Sustituyendo se obtiene el punto de intersección $P\left(-\frac{11}{4},\frac{17}{4},0\right)$

Ejercicio 2. *Calcular los puntos de la recta*

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+2}{-1}$$

que distan 2 unidades del plano $x-2y-2z+1=0$.

Solución:

Calculamos planos paralelos al dado a distancia 2. Estos planos tienen como ecuación $x-2y-2z+D=0$, y además:

$$\frac{|D-1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=2 \quad\Longrightarrow\quad |D-1|=6 \quad\Longrightarrow\quad D-1=\pm 6$$

Así obtenemos los planos $x-2y-2z+7=0$ y $x-2y-2z-5=0$.

Los puntos de intersección de estos planos con la recta dada son las soluciones de los sistemas:

$$\begin{cases} x-2y-2z+7=0 \\ x=2+t \\ y=2+3t \\ z=-2-t \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y-2z-5=0 \\ x=2+t \\ y=2+3t \\ z=-2-t \end{cases}$$

que dan los puntos $P(5,11,-5)$ y $Q(1,-1,-1)$.

Ejercicio 3. *Dados el punto $A(-6,2,0)$ y la recta:*

$$r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = -3t \end{cases}$$

Calcular el punto A' simétrico de A respecto de la recta r.

Solución:

Calculamos el plano perpendicular a la recta r por el punto A. Este plano tiene por ecuación:

$$-1(x+6) + 1(y-2) - 3z = 0 \quad \Longrightarrow \quad -x + y - 3z - 8 = 0$$

Calculamos el punto de intersección de este plano con la recta y obtenemos el punto P:

$$\begin{cases} -x + y - 3z - 8 = 0 \\ x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = -3t \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad P(0,-1,-3)$$

Este punto es punto medio entre A y su simétrico $A'(x,y,z)$:

$$\frac{-6+x}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 6$$
$$\frac{2+y}{2} = -1 \quad \Longrightarrow \quad y = -4$$
$$\frac{z}{2} = -3 \quad \Longrightarrow \quad z = -6$$

Así pues, el simétrico es $A'(6,-4,-6)$.

Ejercicio 4. *Calcular la distancia del punto $P(1,-1,3)$ a la recta* $r: \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 4 = 0 \end{cases}$.

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -4 \\ z = t \end{cases}$$

Un punto de esta recta es $Q(0,-4,0)$ y un vector director $\vec{u} = (1,0,1)$. El vector $\overrightarrow{PQ}$ tiene como coordenadas:

$$\overrightarrow{PQ} = (-1,-3,-3)$$

Y el producto vectorial $\overrightarrow{PQ} \times u$:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-3,-2,3)$$

La distancia del punto a la recta es:

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{2}} = \sqrt{11}$$

También podría resolverse este problema calculando el plano perpendicular a r por P que tiene como vector normal el vector director de r. La ecuación de este plano es:

$$x + z - 4 = 0$$

Calculamos el punto A de intersección entre la recta y el plano:

$$\begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ x = t \\ y = -4 \\ z = t \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A(2, -4, 2)$$

Finalmente, la distancia del punto a la recta es la distancia entre los puntos A y P:

$$\overrightarrow{AP} = (-1, 3, 1) \quad \Longrightarrow \quad d = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

Ejercicio 5. *Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, -1, 2)$ y corta a las rectas:*

$$r_1 : \ \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3} \qquad r_2 : \ \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{3}$$

Solución:

Un punto de la recta r_1 es $Q_1(1, 0, -1)$. Entonces $\overrightarrow{PQ_1} = (0, 1, -3)$.

El plano que contiene a P y a r_1 tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 0 \\ y+1 & 1 & 1 \\ z-2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x + 3y + z - 2 = 0$$

Un punto de la recta r_2 es $Q_2(0, 2, 2)$. Entonces $\overrightarrow{PQ_2} = (-1, 3, 0)$.

El plano que contiene a P y a r_1 tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -1 \\ y+1 & -1 & 3 \\ z-2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 9x + 3y - 5z + 4 = 0$$

Si existe, la recta que se pide debe ser la intersección de los dos planos:

$$\begin{cases} 3x + 3y + z - 2 = 0 \\ 9x + 3y - 5z + 4 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 6. *Calcular la proyección de la recta*

$$r : \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ -y + 3z = -4 \end{cases}$$

sobre el plano $\pi : \ 2x - y + 3z + 5 = 0$.

Solución:

Tomando $z = t$ como parámetro, en forma segmentaria, la recta r se escribe:

$$\begin{cases} x = \frac{13}{2} + 4t \\ y = 4 + 3t \\ z = t \end{cases}$$

El plano que contiene a r y es perpendicular a π es:

$$\begin{vmatrix} x - \frac{13}{2} & 4 & 2 \\ y - 4 & 3 & -1 \\ z & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante se encuentra la ecuación $2x - 2y - 2z - 5 = 0$.

La proyección de la recta es la intersección de π con este plano:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + 5 = 0 \\ 2x - 2y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

Esta es la solución del problema.

El plano que contiene a r y es perpendicular a π podría haberse calculado también de la siguiente forma: el conjunto de los planos que contienen a r es el haz:

$$\lambda(2x - 3y + z - 1) + \mu(-y + 3z + 4) = 0$$
$$2\lambda x + (-3\lambda - \mu)y + (\lambda + 3\mu)z - \lambda + 4\mu = 0$$

Si este plano es perpendicular a $\pi : \ 2x - y + 3z + 5 = 0$ se cumple que:

$$2 \cdot 2\lambda - (-3\lambda - \mu) + 3(\lambda + 3\mu) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 10\lambda + 10\mu = 0$$

Dando los valores $\lambda = 1$, $\mu = -1$ se obtiene:

$$2x - 3y + z - 1 - (-y + 3z + 4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x - 2y - 2z - 5 = 0$$

que es el plano que habíamos obtenido anteriormente.

Ejercicio 7. *Sean las rectas:*

$$r_1 : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - 2y - z = 3 \end{cases}$$

Calcular su posición relativa.

Solución:

La primera recta en forma segmentaria es:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

Un punto de esta recta es $P(0, 3, 3)$ y un vector director $\vec{u} = (1, -2. -3)$.

La segunda recta en la forma paramétrica es:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2s \\ y = s \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Un punto de esta recta es $Q\left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right)$ y un vector director $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

El vector $\overrightarrow{PQ}$ tiene como coordenadas:

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{3}{2}, -3, -\frac{9}{2}\right) \qquad 2\overrightarrow{PQ} = (3, -6, -9)$$

El que las rectas se corten o se crucen depende del rango del sistema de vectores $\vec{u},\ \vec{v},\ overrightarrowPQ$. Calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & -9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(puesto que } F_3 = 3F_1\text{)}$$

El rango del sistema de vectores es 2 y las rectas se cortan.
