1. Límites y continuidad 2ºF

Ejercicio 1. *Calcular el dominio de definición de las siguientes funciones:*

- $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
- $g(x) = \ln(1 + x^2)$
- $h(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1}$
- $i(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

Solución:

- Dominio $= [-2, 2]$
- Dominio $= \mathbb{R}$
- Dominio $= \mathbb{R} - \{0\}$
- Dominio $= [-1, 1)$

Ejercicio 2. *Dada*

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x + a & \text{si } x > 0 \\ b & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} \pi x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

calcula a *y* b *para que la función sea continua en todo* $\mathbb{R}$.

Solución:

Para que la función sea continua, los límites laterales en $x = 0$ deben ser iguales entre sí e iguales al valor de la función. Entonces:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x \ln x + a) = 0 + a = a$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\pi x}{x} = \pi$$

De aquí deducimos que $a = \pi$. Como además el límite debe ser igual al valor de la función, tenemos que $a = b = \pi$.

Ejercicio 3. *Calcula los siguientes límites de funciones:*

- $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^2 - 1}{x + 1} - \frac{6x - 1}{2} \right)$
- $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\frac{e^x}{x + 1} \right)^{3x}$
- $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$
- $\displaystyle\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 + 1}{3x - 1} \right)^{\frac{x+2}{x-2}}$

Solución:

- $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^2 - 1}{x + 1} - \frac{6x - 1}{2} \right) = \lim_{x \to \infty)} \frac{2 \cdot (3x^2 - 1) - (6x - 1) \cdot (x + 1)}{2(x + 1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{-5x}{2x} = -\frac{5}{2}$
- $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x + \sqrt{x} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$
- $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\frac{e^x}{x + 1} \right)^{3x} = \infty^\infty = \infty$

$$\diamond \ \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+1}{3x-1}\right)^{\frac{x+2}{x-2}} = \lim_{x\to 2} e^{\left(\frac{x^2+1}{3x-1}-1\right)\cdot\frac{x+2}{x-2}} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{x^2-3x+2}{3x-1}\cdot\frac{x+2}{x-2}} = \lim_{x\to 2} e^{\frac{(x-1)(x-2)}{3x-1}\cdot\frac{x+2}{x-2}} = e^{\frac{4}{5}}$$

En el primer límite se ha hecho la resta y se han comparado los términos de mayor grado del numerador y del denominador. En el segundo se ha multiplicado y dividido por la expresión conjugada. El tercer límite es inmediato. En el cuarto se ha aplicado la aproximación del logaritmo para las indeterminaciones del tipo 1^∞.

Ejercicio 4. *Probar que la función $f(x) = x\cdot 2^x - 1$ tiene al menos un punto de corte con el eje de abscisas. Encuentra dicho punto con un error menor de dos décimas.*

Solución:

La función f es continua para todo valor de x por ser suma y producto de funciones continuas. Además:

$$f(0) = -1 < 0$$
$$f(1) = 1 > 0$$

De acuerdo con el teorema de Bolzano, existe un punto $\xi \in (0,1)$ en el que $f(\xi) = 0$. Por consiguiente, la gráfica de la función corta al eje de abscisas en el punto $(\xi, 0)$.

Además, puede verse que $f(0{,}5) < 0$ y $f(0{,}7) > 0$. Podemos decir que ξ está en el intervalo $(0{,}5; 0{,}7)$.

Ejercicio 5. *Calcular las asíntotas de las funciones:*

- $\diamond$ $f(x) = \dfrac{x^2-3x+1}{x+5}$
- $\diamond$ $g(x) = \dfrac{x-1}{e^x}$

Solución:

- $\diamond$ La primera función tiene una asíntota vertical $x = -5$. No tiene asíntota horizontal. La asíntota oblicua puede obtenerse por división y es $y = x - 8$.
- $\diamond$ La segunda función no tiene asíntota vertical porque e^x nunca es cero. Para hallar las asíntotas horizontales calculamos los límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{e^x} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{e^x} = -\infty$$

Por consiguiente, la función tiene una asíntota horizontal $y = 0$ en $+\infty$.

---

2. Límites y continuidad 2ºH

Ejercicio 1. *Dada la función:*

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & x < 0 \\ x - a & 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{a}{x} + b & x \geq 1 \end{cases}$$

calcular a y b para que la función f sea continua.

Solución:

Los límites laterales en $x = 0$ deben coincidir. Entonces:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ax^2 + b = 0 + b = b$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x - a = -a$$

Lo mismo en $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x - a = 1 - a$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{a}{x} + b = a + b$$

Tenemos entonces el sistema:

$$\begin{cases} b = -a \\ 1 - a = a + b \end{cases}$$

cuya solución es $a = 1$ y $b = -1$.

Ejercicio 2. *Demostrar que la ecuación $x^3 + x = 5$ tiene una solución en el intervalo $(1, 2)$. Calcular la solución con una precisión de 2 décimas.*

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función $F(x) = x^3 + x - 5$ toma el valor cero para algún valor de x.

$F(x)$ es continua por ser una función polinómica. Ademas:

$$F(1) = 1 + 1 - 5 < 0$$
$$F(2) = 8 + 2 - 5 > 0$$

De acuerdo con el teorema de Bolzano, existe $\xi \in (1, 2)$ tal que $F(\xi) = 0$.

Aplicando el mismo teorema de Bolzano, puede verse que debe haber una solución de la ecuación en el intervalo (1,5; 1,6).

Ejercicio 3. *Calcular los siguientes límites:*

- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$
- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}}$
- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 9}$
- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 3x - 5}$

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)$

Solución:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(1-x^2)}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} == \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-9} = \infty$

  Calculamos los límites por la derecha y por la izquierda y, comparando el signo del numerador y del denominador, resulta:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-2x+1}{x^2-9} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-2x+1}{x^2-9} = +\infty$$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{\frac{x^2}{x+3}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x+5}{x-1}-1\right)\frac{x^2}{x+3}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{6x^2}{(x-1)(x+3)}} = e^6$
- $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{2x^2-3x-5} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(2x-5)} = \dfrac{3}{7}$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x+\sqrt{x^2-4x}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-(x^2-4x)}{x-\sqrt{x^2-4x}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{4x}{x-\sqrt{x^2-4x}} = 2$

En este último limite el resultado es positivo porque el numerador y el denominador tienen el mismo signo.

Ejercicio 4. *Calcular el dominio de definición de las siguientes funciones:*

- $f(x) = \ln(4-x^2)$
- $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x-1}$

Solución:

- Dominio $= (-2, 2)$
- Dominio $= [-3, \infty) - \{1\}$

Ejercicio 5. *Calcular las asíntotas de las funciones:*

- $y = \dfrac{-x^2+3}{x+2}$
- $y = \sqrt{x^2+5}$

Solución:

- La primera función tiene una asíntota vertical $x=-2$. No tiene asíntotas horizontales. Calculemos las asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\frac{-x^2+3}{x+2} = -1$$
$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-x^2+3}{x+2}+x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+3+x^2+2x}{x+2} = 2$$

  Por consiguiente la asíntota oblicua es $y=-x+2$

- ◇ Claramente la segunda función no tiene asíntotas horizontales ni verticales. Estudiemos si tiene asíntotas oblicuas:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+5} - x\right) = 0$$

Por tanto, hay una asíntota oblicua $y = x$ en $+\infty$. Igualmente:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}}{x} = -1$$
$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+5} - x\right) = 0$$

y la asíntota en $-\infty$ es $y = -x$.

3. Derivadas 2ºH

Ejercicio 1. *Derivar las siguientes funciones (no es necesario simplificar):*

- $\diamond\ y = \operatorname{artg} \dfrac{1}{x}$
- $\diamond\ y = 5 \operatorname{sen} 2x + 2 \operatorname{tg} x$
- $\diamond\ y = 5 \ln \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
- $\diamond\ y = \dfrac{x}{(1-x)^2}$
- $\diamond\ y = (2x-3)e^{-x}$
- $\diamond\ y = \ln(x^2+1) \operatorname{arsen} \sqrt{x}$
- $\diamond\ y = e^x \operatorname{sen} x \cos 2x$
- $\diamond\ y = x^{\operatorname{sen} x}$

Solución:

$\diamond\ y = \operatorname{artg} \dfrac{1}{x}$

$$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{-1}{x^2}$$

$\diamond\ y = 5 \operatorname{sen} 2x + 2 \operatorname{tg} x$

$$y' = 5 \cos 2x \cdot 2 + 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)$$

$\diamond\ y = 5 \ln \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 5\left(\ln 1 - \ln \sqrt{x}\right) = 5 \ln 1 - \dfrac{5}{2} \ln x$

$$y' = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

$\diamond\ y = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

$$y' = \frac{1 \cdot (1-x)^2 - 2(1-x)(-1) \cdot x}{(1-x)^4}$$

$\diamond\ y = (2x-3)e^{-x}$

$$y' = 2 \cdot e^{-x} + e^{-x}(-1) \cdot (2x-3)$$

$\diamond\ y = \ln(x^2+1) \operatorname{arsen} \sqrt{x}$

$$y' = \frac{2x}{x^2+1} \cdot \operatorname{arsen} \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln(x^2+1)$$

$\diamond\ y = e^x \operatorname{sen} x \cos 2x$

$$y' = e^x \cdot \operatorname{sen} x \cos 2x + \cos x \cdot e^x \cos 2x + (-\operatorname{sen} 2x)2 \cdot e^x \operatorname{sen} x$$

$\diamond\ y = x^{\operatorname{sen} x} = e^{\operatorname{sen} x \ln x}$

$$y' = e^{\operatorname{sen} x \ln x} \cdot (\cos x \ln x + \frac{1}{x} \operatorname{sen} x)$$

Ejercicio 2. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:*

$$f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$$

Determinar a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$.

Solución:

Obtenemos la abscisa del punto de inflexión igualando a cero la derivada segunda:

$$\begin{aligned} y' &= 6x^2 + 24x + a \\ y'' &= 12x + 24 = 0 \Longrightarrow x_0 = -2 \end{aligned}$$

La ordenada del punto de inflexión la podemos obtener a partir de la ecuación de la tangente:

$$y_0 = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$$

El punto de inflexión es $I(-2, -1)$.

Puesto que la tangente en el punto de inflexión tiene pendiente 2, la derivada en ese punto debe ser igual a 2. Tenemos entonces el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} f(-2) = -1 &\Longrightarrow -16 + 48 - 2a + b = -1 \\ f'(-2) = 3 &\Longrightarrow 24 - 48 + a = 2 \end{aligned}$$

que tiene como solución $a = 26,\ b = 19$.

Ejercicio 3. *Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:*

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

Solución:

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{(6x+1) \cdot (x^2+1) - 2x \cdot (3x^2 + x + 3)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

Las raíces del numerador son -1 y $+1$. El denominador no tiene raíces.

El signo de la derivada está dado en el siguiente esquema:

	0		0	
$-$		$+$		$-$
	-1		1	

Hay un mínimo en el punto $m(-1, \frac{5}{2})$ y un máximo en $M(1, \frac{7}{2})$.

Para obtener los puntos de inflexión calculamos la segunda derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-2x) \cdot (x^2+1)^2 - 2(x^2+1)2x \cdot (-x^2+1)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{(-2x) \cdot (x^2+1) - 4x \cdot (-x^2+1)}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

Los ceros de la derivada segunda son $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$. Analizamos el signo de la derivada segunda:

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ - & | & + & | & - & | & + \\ & -\sqrt{3} & & 0 & & \sqrt{3} & \end{array}$$

Como en esos puntos cambia la curvatura, se trata de puntos de inflexión.

Ejercicio 4. *Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ solo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número m. Justifica la respuesta indicando qué teoremas se usan.*

Solución:

Sea la función $f(x) = 4x^5 + 3x + m$ continua y derivable para todo valor de x. El problema es equivalente a demostrar que $f(x)$ solamente tiene un cero.

De acuerdo con el teorema de Rolle, entre cada dos ceros de una función continua y derivable debe haber al menos un cero de la derivada. Pero la derivada de f:

$$f'(x) = 20x^4 + 3$$

no se anula para ningún valor. Por consiguiente, $f(x)$ tiene a lo sumo un cero.

Demostremos que efectivamente se anula:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Longrightarrow f(x) \text{ toma valores negativos}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Longrightarrow f(x) \text{ toma valores positivos}$$

Puesto que la función toma valores positivos y negativos, de acuerdo con el teorema de Bolzano debe existir al menos un punto en el que toma el valor cero.

Ejercicio 5.

◇ *Calcular el siguiente límite:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{x+1}$$

según los valores del parámetro α.

◇ *Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$
2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

Solución:

◇ Se trata de un límite indeterminado del tipo 1^∞:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\alpha x^2 + 4x + 8}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}(x+1)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{x+1}{\alpha x^2+4x+8}}$$

Pueden darse dos casos:

- Si $\alpha \neq 0$, la fracción en el exponente tiende a cero puesto que el denominador es de mayor grado que el numerador. En este caso, el límite es $e^0 = 1$.
- Si $\alpha = 0$, la fracción en el exponente tiende a $\frac{1}{4}$, de forma que el límite es $e^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{e}$.

◇ También es una indeterminación del tipo 1^{∞}:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{\cos x+\operatorname{sen} x-1}{x}}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{-\operatorname{sen} x+\cos x}{1}}=e$$

◇ Hacemos la resta y aplicamos la regla de l'Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{1\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cdot(x-1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{1\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cdot x+1}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

4. Derivadas 2ºF

Ejercicio 1. *Derivar las siguientes funciones (no es necesario simplificar):*

- $\diamond$ $y = \operatorname{artg} \ln x$
- $\diamond$ $y = 3\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{tg} 2x$
- $\diamond$ $y = e^{\sqrt{x}}$
- $\diamond$ $y = \dfrac{1-x}{(1+x)^2}$
- $\diamond$ $y = e^{-x}\cos x$
- $\diamond$ $y = \ln(x^2+1)^3$
- $\diamond$ $y = \operatorname{sen}(x^2+e^{2x})$
- $\diamond$ $y = \sqrt{\cos 2x}$

Solución:

- $\diamond$ $y = \operatorname{artg} \ln x$

$$y' = \frac{1}{1+(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}$$

- $\diamond$ $y = 3\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{tg} 2x$

$$y' = 3\cdot 2\operatorname{sen} x\cos x - 2\cdot(1+\operatorname{tg}^2 2x)\cdot 2$$

- $\diamond$ $y = e^{\sqrt{x}}$

$$y' = e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- $\diamond$ $y = \dfrac{1-x}{(1+x)^2}$

$$y' = \frac{(-1)(1+x)^2 - 2(1+x)\cdot(1-x)}{(1+x)^4}$$

- $\diamond$ $y = e^{-x}\cos x$

$$y' = e^{-x}(-1)\cdot\cos x + (-\operatorname{sen} x)\cdot e^{-x}$$

- $\diamond$ $y = \ln(x^2+1)^3 = 3\ln(x^2+1)$

$$y' = 3\cdot\frac{2x}{x^2+1}$$

- $\diamond$ $y = \operatorname{sen}(x^2+e^{2x})$

$$y' = \cos(x^2+e^{2x})\cdot(2x+e^{2x}\cdot 2)$$

- $\diamond$ $y = \sqrt{\cos 2x}$

$$y' = \frac{-\operatorname{sen} 2x\cdot 2}{2\sqrt{\cos 2x}}$$

Ejercicio 2. *Sea $f(x) = x^2+ax+b$. Halla los valores de a y b para que la recta $y = 2x$ sea tangente a la gráfica en el punto $P(2,4)$.*

Solución:

Derivamos la función:

$$f'(x) = 2x + a$$

Las condiciones que nos dan son:

$$\begin{aligned} f(2) = 4 &\Longrightarrow 4 + 2a + b = 4 \\ f'(2) = 2 &\Longrightarrow 4 + a = 2 \end{aligned}$$

de donde $a = -2$, $b = 4$.

Ejercicio 3. *Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función* $y = x^2e^x$.

Solución:

Calculamos la primera derivada:

$$y' = 2x \cdot e^x + e^x \cdot x^2 = e^x(x^2 + 2x)$$

Los ceros de la derivada son $x = 0$ y $x = -2$. El signo de la derivada está dado por:

x		-2		0	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Por consiguiente hay un máximo en $x = -2$ y un mínimo en $x = 0$.

Estudiemos ahora la segunda derivada para calcular los puntos de inflexión:

$$y'' = e^x \cdot (x^2 + 2x) + (2x + 2) \cdot e^x = e^x(x^2 + 4x + 2)$$

Los ceros de la segunda derivada son $x = -2 - \sqrt{2}$ y $x = -2 + \sqrt{2}$. El signo de la segunda derivada en función de x es:

x		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$	
y''	$+$	0	$-$	0	$+$

Hay puntos de inflexión en $x = -2 - \sqrt{2}$ y $x = -2 + \sqrt{2}$.

Ejercicio 4. *Demostrar que la gráfica de la función* $f(x) = 3x^5 + 7x + 1$ *tiene exactamente un punto de corte con el eje de abscisas. Indicar los teoremas que se utilizan.*

Solución:

La función tiene al menos un punto de corte con el eje de abscisas (es decir, se hace cero en algún punto) ya que es continua y:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Longrightarrow f(x) \text{ toma valores negativos} \\ &\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \Longrightarrow f(x) \text{ toma valores positivos} \end{aligned}$$

Puesto que la función es continua y toma valores positivos y negativos, de acuerdo con el teorema de Bolzano debe existir al menos un punto en el que toma el valor cero.

La función es derivable y su derivada es:

$$y' = 15x^4 + 7$$

que es siempre positiva. Entonces, no puede tener dos puntos de corte con el eje de abscisas porque, de acuerdo con el teorema de Rolle, debería haber un punto intermedio en que la derivada fuese cero, lo que sabemos que no es cierto pues hemos visto que la derivada es siempre positiva.

Ejercicio 5. *Calcular los siguientes límites:*

- $\diamond\ \lim_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)\operatorname{sen} x}{x^3}$
- $\diamond\ \lim_{x\to 0} (e^x - x)^{\frac{1}{x}}$
- $\diamond\ \lim_{x\to 1} (x^2-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$
- $\diamond\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}\cdot x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} (e^x - x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{e^x-x-1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{e^x-1}{1}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 1} (x^2-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{-(1+\operatorname{cotg}^2\frac{\pi x}{2})\frac{\pi}{2}} = \frac{-2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{-4}{\pi}$$

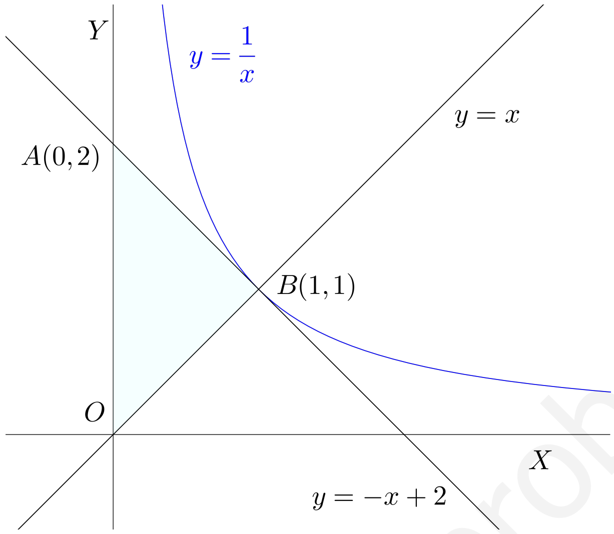
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (1+2\cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} e^{\frac{2\cos x}{\cos x}} = e^2$$

---

5. Examen de la primera evaluación 2ºH

Ejercicio 1. *Calcula el área del triángulo formado por el eje vertical y las rectas tangente y normal a la curva* $y = \frac{1}{x}$ *en el punto de abscisa* 1.

Solución:



El punto de tangencia es $B(1,1)$. La derivada de la función es $y' = \frac{-1}{x^2}$. La pendiente de la recta tangente es:

$$m = y'(1) = -1$$

y la pendiente de la recta normal:

$$m' = \frac{-1}{m} = 1$$

Las ecuaciones de las rectas tangente y normal son:

$$y - 1 = (-1)(x - 1) \Longrightarrow y = -x + 2$$
$$y - 1 = 1 \cdot (x - 1) \Longrightarrow y = x$$

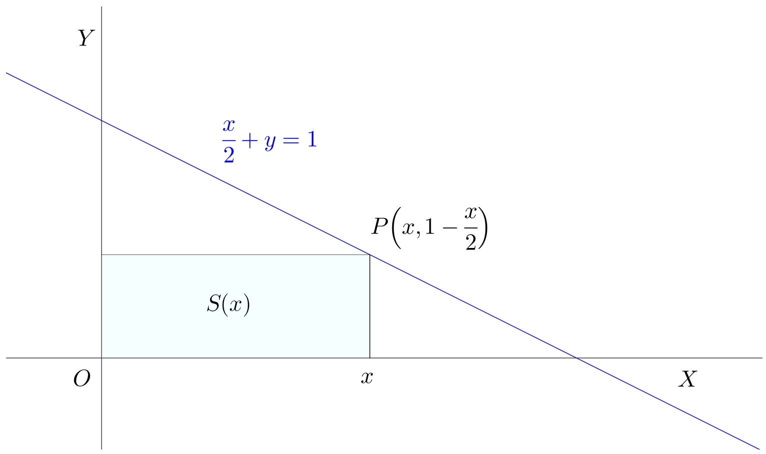
De la figura anterior sw desprende que el área del triángulo es 1.

Ejercicio 2. *De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta* r *de ecuación*

$$\frac{x}{2} + y = 1$$

determinar el de área máxima.

Solución:



La funcón que ha de ser máxima es:

$$S(x) = x\left(1 - \frac{x}{2}\right) = x - \frac{x^2}{2}$$

Calculamos la derivada e igualamos a cero:

$$S'(x) = 1 - \frac{2x}{2} = 1 - x = 0$$

y de aquí $x = 0$. El rectángulo de área máxima es el que tiene el vértice en el punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Ejercicio 3. *Utilizando los teoremas de Bolzano y Rolle, demostrar que las curvas* $y = \cos x$ *e* $y = \sqrt{x}$ *se cortan en un único punto del intervalo* $(0, \pi)$.

Solución:

El problema es equivalente a demostrar que la función $F(x) = \cos x - \sqrt{x}$ tiene un único cero en el intervalo $(0, \pi)$.

La función $F(x)$ es continua en $[0, \pi]$. Además:

$$\begin{aligned} F(0) &> 0 \\ F(\pi) &< 0 \end{aligned}$$

Luego, por el teorema de Bolzano, existe al menos un punto del intervalo en que la función se hace cero.

Veamos que éste es el único cero en el intervalo. La función es derivable en $(0, \pi)$. Según el teorema de Rolle, entre dos ceros de la función debe haber al menos un cero de la derivada. Pero la derivada es:

$$F'(x) = senx - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

que es negativa en ese intervalo (suma de dos números negativos). Como la derivada no tiene ceros, el cero de la función es único.

Ejercicio 4. *Dada la función*

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

se pide dibujar la gráfica de f estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

Solución:

Estudiemos en primer lugar la derivada de la función:

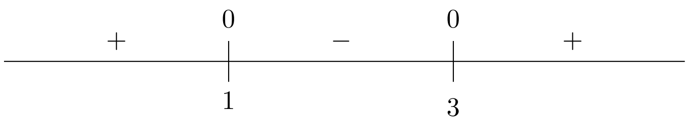
$$f'(x) = -e^{-x} \cdot (x^2+1) + 2x \cdot e^{-x} = e^{-x}(-x^2+2x-1) = -e^{-x}(x-1)^2$$

La derivada es negativa salvo en $x = 1$ que vale cero. La función es siempre decreciente.

Calculemos la segunda derivada:

$$y'' = e^{-x} \cdot (x-1)^2 - 2(x-1) \cdot e^{-x} = e^{-x}(x-1)(x-3)$$

La segunda derivada se anula en $x = 1$ y $x = 3$. El signo es como sigue:

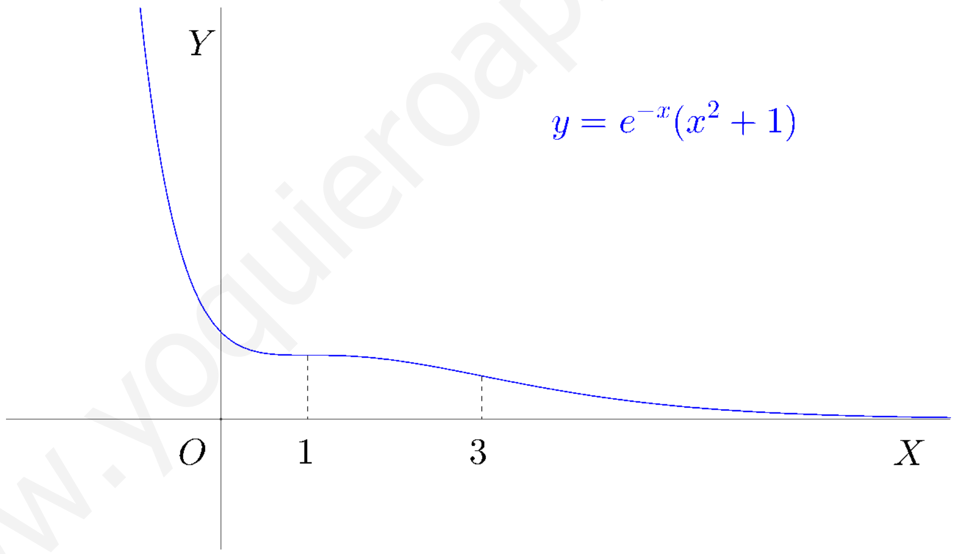


La función es cóncava en $(-\infty, 1)$ y en $(3, \infty)$, es convexa en $(1, 3)$. Hay puntos de inflexión en $x = 1$ y $x = 3$. En el primero de ellos, como también se anula la derivada primera, la tangente es horizontal.

Hay una asíntota horizontal $y = 0$ en $+\infty$ puesto que

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}(x^2+1) \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{e^x} = 0$$

La gráfica de la función es como sigue:



Ejercicio 5. *Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:*

$$f(x) = \frac{3x^2+x+3}{x^2+1}$$

Solución:

Derivamos:

$$f'(x) = \frac{(6x+1)\cdot(x^2+1) - 2x\cdot(3x^2+x+3)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

La derivada se anula en $x = -1$ y $x = 1$. El signo de la derivada es:

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & 0 & \\ - & | & + & | & - \\ & -1 & & 1 & \end{array}$$

Hay un mínimo en $x = -1$ y un máximo en $x = 1$.

Analicemos la segunda derivada:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{-2x \cdot (x^2+1)^2 - 2(x^2+1)2x \cdot (-x^2+1)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{-2x \cdot (x^2+1) - 4x \cdot (-x^2+1)}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

La segunda derivada se anula para:

$$2x^3 - 6x = 0 \Longrightarrow 2x(x^2 - 3) = 0$$

o sea para $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$. El signo de esta derivada es:

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ - & | & + & | & - & | & + \\ & -\sqrt{3} & & 0 & & \sqrt{3} & \end{array}$$

Los puntos de inflexión están en $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$.

6. Examen de la primera evaluación 2ºF

Ejercicio 1. *Dada la función* $f(x) = xe^{2x}$ *dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.*

Solución:

- El dominio de la función es el conjunto de los números reales.
- La recta $y = 0$ es asíntota horizontal en $-\infty$ puesto que:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-2e^{-2x}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

- La derivada de la función es:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{2x} + x \cdot 2e^{2x} = e^{2x}(1+2x)$$

  Hay un cero se la derivada en $x = -\frac{1}{2}$. El signo de la derivada es:

$-$	0	$+$
	$-\frac{1}{2}$	

  La función es decreciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$. Hay un mínimo de la función en el punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2e}\right)$.

- Estudiemos ahora la derivada segunda:

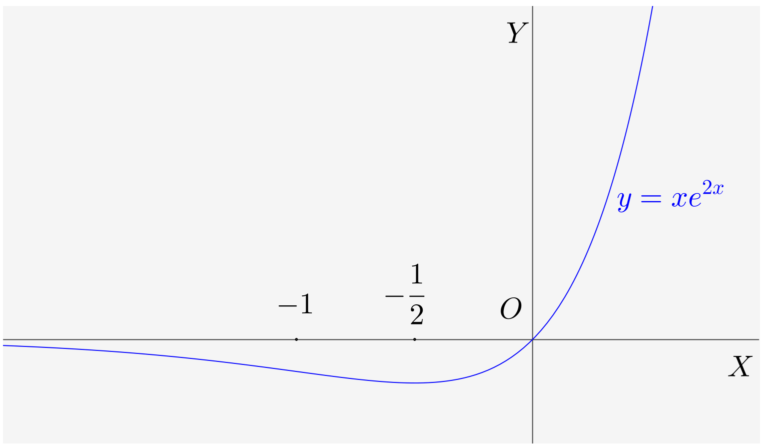
$$f''(x) = 2 \cdot e^{2x} + (1+2x) \cdot 2e^{2x} = 2e^{2x}(2+2x)$$

  Hay un cero de la derivada segunda en $x = -1$. El signo de esta derivada está dado por el siguiente esquema:

$-$	0	$+$
	-1	

  La función es convexa en $(-\infty, -1)$ y cóncava en $(-1, \infty)$ El punto $\left(-1, -\frac{1}{e^2}\right)$ es un punto de inflexión.

- Con estos datos, la gráfica de la función es como sigue:



Ejercicio 2. *Obtener los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:*

$$f(x) = x\,(\ln x)^2$$

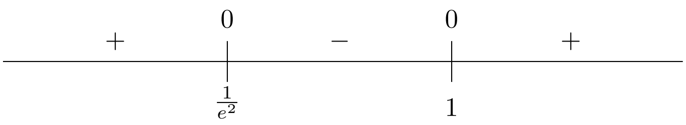
siendo $\ln x$ *el logaritmo neperiano de* x.

Solución:

La derivada de la función es:

$$f'(x) = 1 \cdot (\ln x)^2 + 2\ln x\, \frac{1}{x} \cdot x = \ln x\,(\ln x + 2)$$

Los ceros de la derivada están en $x = 1$ y $x = e^{-2}$. Estudiamos el signo y resulta:

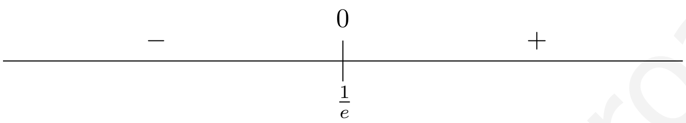


Hay un máximo en $x = \frac{1}{e^2}$ y un mínimo en $x = 1$.

Calculemos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{1}{x} \cdot (\ln x + 2) + \frac{1}{x} \cdot \ln x = \frac{2\ln x + 2}{x}$$

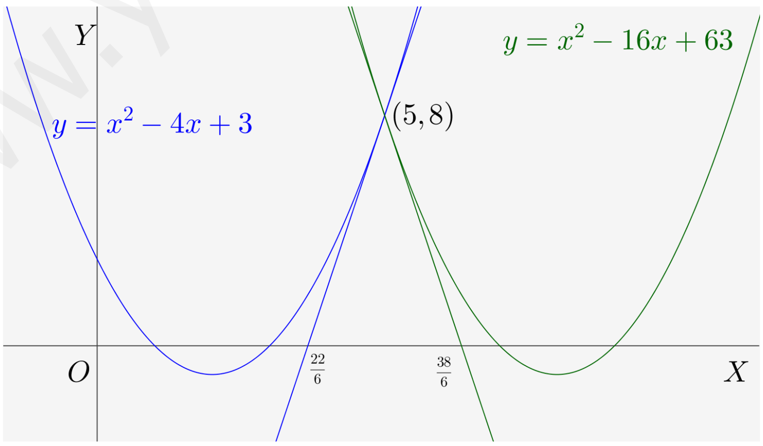
La segunda derivada se anula en $x = e^{-1}$ y su signo está dado por:



Hay un punto de inflexión en $x = \frac{1}{e}$.

Ejercicio 3. *Dadas las parábolas* $y = x^2 - 4x + 3$ *e* $y = x^2 - 16x + 63$, *calcula el área del triángulo formado por el eje* X *y las rectas tangentes a dichas parábolas en el punto de corte entre ellas.*

Solución:



El punto de intersección de las dos parábolas es la solución del sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = x^2 - 16x + 63 \end{cases}$$

Resolviendo se obtiene el punto $(5, 8)$.

Calculamos ahora las rectas tangentes a las dos parábolas en ese punto. Las derivadas son:

$$y' = 2x - 4 \Longrightarrow m = y'(5) = 6$$
$$y' = 2x - 16 \Longrightarrow m' = y'(5) = -6$$

Las tangentes son:

$$y - 8 = 6\,(x - 5)$$
$$y - 8 = -6\,(x - 5)$$

o en forma explícita:

$$y = 6x - 22$$
$$y = -6x + 38$$

Estas rectas cortan al eje de abscisas en los puntos $x = \frac{22}{6}$ y $x = \frac{38}{6}$. La base del triángulo mide:

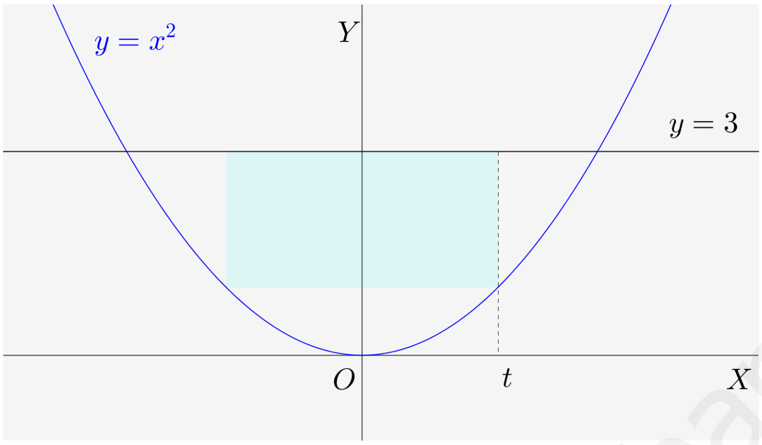
$$\frac{38}{6} - \frac{22}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

La altura del triángulo mide 8. El área es:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot 8 = \frac{32}{3}$$

Ejercicio 4. *Considérese el recinto limitado por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 3$. De entre los rectángulos que tienen un lado sobre la porción de recta que queda sobre la curva y los otros dos vértices sobre la parábola, determinar el que tiene área máxima.*

Solución:



Para cada valor de t la superficie del rectángulo es:

$$S(t) = 2t(3 - t^2) = 6t - 2t^3$$

Si la superficie ha de ser máxima, la derivada de esta función debe ser igual a cero:

$$S'(t) = 6 - 6t^2$$

que se anula para $t = -1$ y $t = 1$. Ambos valores corresponden al mismo rectángulo.

Ejercicio 5. *Demostrar que la ecuación $1 - x = e^x$ solamente tiene una solución.*

Solución:

Es claro que $x = 0$ es una solución pero, si uno no se da cuenta de eso, puede demostrar su existencia mediante el teorema de Bolzano.

La ecuación tiene solución si la función $f(x) = e^x + x - 1$ se hace cero para algún valor de x. Esta función es siempre continua y además:

$$f(-1) = e^{-1} - 1 - 1 < 0$$
$$f(1) = e + 1 - 1 > 0$$

Entonces, de acuerdo con el teorema de Bolzano, existe $\xi \in (-1, 1)$ tal que $f(\xi) = 0$. Este número ξ es una solución de la ecuación. Veamos ahora que no puede haber ninguna más.

La función $f(x)$ es continua y derivable. Por el teorema de Rolle, entre dos ceros de $f(x)$ debería haber al menos un cero de $f'(x)$. Pero:

$$f'(x) = e^x + 1$$

no se anula nunca. Por consiguiente, no puede haber dos ceros de $f(x)$.

---

7. Integral indefinida (grupo F)

Calcular las siguientes integrales:

1. $$\int (x^2-3)(x^3+5)\ \mathrm{d}x = \int \left(x^5-3x^3+5x^2-15\right)\ \mathrm{d}x = \frac{x^6}{6} - \frac{3x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - 15x + C$$

2. $$\int \frac{3}{\operatorname{sen}^2 x}\ \mathrm{d}x = -3\operatorname{cotg} x + C$$

3. $$\int \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arsen} x + C$$

4. $$\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\ \mathrm{d}x = 2\int x^{-\frac{1}{3}}\ \mathrm{d}x = 2\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C$$

5. $$\int \frac{1}{4+x^2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2^2+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ \operatorname{artg}\ \frac{x}{2} + C$$

6. $$\int (2x+3)^5\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ \frac{(2x+3)^6}{6} + C$$

7. $$\int e^{1-3x}\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\ e^{1-3x} + C$$

8. $$\int \frac{5}{2x+1}\ \mathrm{d}x = 5\ \frac{1}{2}\ln(2x+1) + C$$

9. $$\int \frac{1}{(3x-5)^2}\ \mathrm{d}x = \int (3x-5)^{-2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ \frac{(3x-5)^{-1}}{-1} + C$$

10. $$\int \frac{(\ln x)^3}{x}\ \mathrm{d}x$$

    Con el cambio de variable:

    $$t = \ln x$$
    $$dt = \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x$$
    $$\int \frac{(\ln x)^3}{x}\ \mathrm{d}x = \int t^3\ \mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(\ln x)^4}{4} + C$$

11. $$\int x\sqrt{(x^2+2)^5}\ \mathrm{d}x$$

    Con el cambio de variable:

    $$t^2 = x^2+2$$
    $$2t\ \mathrm{d}t = 2x\ \mathrm{d}x$$
    $$t\ \mathrm{d}t = x\ \mathrm{d}x$$
    $$\int x\sqrt{(x^2+2)^5}\ \mathrm{d}x = \int t^5\cdot t\ \mathrm{d}t = \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sqrt{(x^2+2)^7}}{7} + C$$

12. $$\int x \operatorname{sen} 2x \, \mathrm{d}x$$

Por partes:

$$u = x \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \operatorname{sen} 2x \, \mathrm{d}x \qquad v = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\int x \operatorname{sen} 2x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\, x \cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\, x\cos 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

13. $$\int \frac{x^2 - x + 3}{x+1} \, \mathrm{d}x$$

Haciendo la división

$$\int \frac{x^2 - x + 3}{x+1} \, \mathrm{d}x = \int \left(x - 2 + \frac{5}{x+1} \right) \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 2x + 5 \ln|x+1| + C$$

14. $$\int \cos x \operatorname{sen}^3 x \, \mathrm{d}x$$

Con el cambio:

$$t = \operatorname{sen} x$$
$$\mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x$$

$$\int \cos x \operatorname{sen}^3 x \, \mathrm{d}x = \int t^3 \, \mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} + C$$

15. $$\int \frac{\ln x}{x^2} \, \mathrm{d}x$$

Por partes:

$$u = \ln x \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x \qquad v = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C$$

16. $$\int e^x \sqrt{e^x + 1} \, \mathrm{d}x$$

Con el cambio:

$$t^2 = e^x + 1$$
$$2t \, \mathrm{d}t = e^x \, \mathrm{d}x$$

$$\int e^x \sqrt{e^x+1} \, \mathrm{d}x = 2 \int t \cdot t \, \mathrm{d}t = \frac{2t^3}{3} + C = \frac{2\sqrt{(e^x+1)^3}}{3} + C$$

17. $$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} \, \mathrm{d}x$$

Hacemos el cambio:

$$t^2 = x$$
$$2t \, \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} \, \mathrm{d}x = 2 \int \frac{1}{t(1+t)}\, t \, \mathrm{d}t = 2\ln|1+t| + C = 2\ln|1+\sqrt{x}| + C$$

18. $$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \right) + C$$

Esta integral puede hacerse también por partes.

19. $$\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^3}} \, \mathrm{d}x$$

Hacemos el cambio:

$$\begin{aligned} t^2 &= 1 - x^3 \\ 2t \, \mathrm{d}t &= -3x^2 \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x &= -\frac{2t \, \mathrm{d}t}{3x^2} \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^3}} \, \mathrm{d}x = -\int \frac{x^2}{t} \cdot \frac{2t}{3x^2} \, \mathrm{d}t = -\frac{2}{3} t + C = -\frac{2}{3} \sqrt{1 - x^3} + C$$

20. $$\int x\sqrt{x + 1} \, \mathrm{d}x$$

Con el cambio:

$$\begin{aligned} t^2 &= x + 1 \\ 2t \, \mathrm{d}t &= \mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x + 1} \, \mathrm{d}x &= 2 \int x \cdot t^2 \, \mathrm{d}t = 2 \int (t^2 - 1) \, t^2 \, \mathrm{d}t \\ &= 2 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) + C = 2 \left(\frac{\sqrt{(x + 1)^5}}{5} - \frac{\sqrt{(x + 1)^3}}{3} \right) + C \end{aligned}$$

8. Integral indefinida (grupo H)

Calcular las siguientes integrales:

1. $$\begin{aligned} \int (x^2 - 3)(x^3 + 5x^2 + 1) \, \mathrm{d}x &= \int \left(x^5 + 5x^4 - 3x^3 - 14x^2 - 3 \right) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^6}{6} + \frac{5x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} - \frac{14x^3}{3} - 3x + C \end{aligned}$$

2. $$\int \frac{3}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = 3 \operatorname{tg} x + C$$

3. $$\int \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \operatorname{arsen} x + C$$

4. $$\int \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} \, \mathrm{d}x = 2 \int x^{-\frac{2}{3}} \, \mathrm{d}x = 2 \, \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C$$

5. $$\int \frac{1}{1 + 4x^2} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1 + (2x)^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \operatorname{artg} 2x + C$$

6. $$\int (2x + 3)^5 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \, \frac{(2x + 3)^6}{6} + C$$

7. $$\int e^{3x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,e^{3x-1} + C$$

8. $$\int \frac{2}{3x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\ln|3x+1| + C$$

9. $$\int \frac{1}{(2x-5)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-5)^{-2}}{-2} + C$$

10. $$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x =$$

Con el cambio:

$$\begin{aligned} t &= \ln x \\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

resulta:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(\ln x)^3}{3} + C$$

11. $$\int x\sqrt{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x$$

Hacemos el cambio:

$$\begin{aligned} t^2 &= x^2+1 \\ 2t\,\mathrm{d}t &= 2x\,\mathrm{d}x \\ t\,\mathrm{d}t &= x\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

y se tiene que:

$$\int x\sqrt{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x = \int t^3\,t\,\mathrm{d}t = \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sqrt{(x^2+1)^5}}{5} + C$$

12. $$\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x$$

Por partes:

$$\begin{aligned} u &= x & \mathrm{d}u &= \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= \cos 2x\,\mathrm{d}x & v &= \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x \end{aligned}$$

tenemos que:

$$\int x\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

13. $$\int \frac{2x^2-3x+1}{x-1}\,\mathrm{d}x$$

Haciendo la división se obtiene de cociente $2x-1$ y de resto 0. Entonces:

$$\int \frac{2x^2-3x+1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int (2x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{2x^2}{2} - x + C$$

14. $$\int \operatorname{sen} x \cos^3 x \, \mathrm{d}x$$

Mediante el cambio:

$$\begin{aligned} t &= \cos x \\ \mathrm{d}t &= -\operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

se obtiene:

$$\int \operatorname{sen} x \cos^3 x \, \mathrm{d}x = -\int t^3 \, \mathrm{d}t = -\frac{t^4}{4} + C = -\frac{\cos^4 x}{4} + C$$

15. $$\int \frac{\ln x}{x^2} \, \mathrm{d}x$$

Por partes:

$$\begin{aligned} u &= \ln x & \mathrm{d}u &= \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x & v &= -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

resulta:

$$\int \frac{\ln x}{x^2} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{x} \ln x + \int \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + C$$

16. $$\int e^x \sqrt{e^x + 1} \, \mathrm{d}x$$

Con el cambio:

$$\begin{aligned} t^2 &= e^x + 1 \\ 2t \, \mathrm{d}t &= e^x \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

obtenemos:

$$\int e^x \sqrt{e^x + 1} \, \mathrm{d}x = 2 \int t \cdot t \, \mathrm{d}t = \frac{2t^3}{3} + C = \frac{2\sqrt{(e^x + 1)^3}}{3} + C$$

17. $$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} \, \mathrm{d}x$$

Hacemos el cambio:

$$\begin{aligned} t^2 &= x \\ 2t \, \mathrm{d}t &= \mathrm{d}x \end{aligned}$$

y obtenemos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} \, \mathrm{d}x = 2 \int \frac{1}{t(1 + t)} t \, \mathrm{d}t = 2 \ln |1 + t| + C = 2 \ln |1 + \sqrt{x}| + C$$

18. $$\int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x$$

Por partes:

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sen} x & \mathrm{d}u &= \cos x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x & v &= -\cos x \end{aligned}$$

resulta:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) \, \mathrm{d}x$$
$$= -\operatorname{sen} x \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x$$

Pasando la integral al primer miembro y despejando:

$$2 \int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x = -\operatorname{sen} x \cos x + x \quad \Longrightarrow \quad \int \operatorname{sen}^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{-\operatorname{sen} x \cos x + x}{2} + C$$

Esta integra puede hacerse también teniendo en cuenta que:

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

19. $$\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^3}} \, \mathrm{d}x$$

Hacemos el cambio:

$$t^2 = 1 - x^3$$
$$2t \, \mathrm{d}t = -3x^2 \, \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}x = -\frac{2t \, \mathrm{d}t}{3x^2}$$

y obtenemos:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^3}} \, \mathrm{d}x = -\int \frac{x^2}{t} \cdot \frac{2t}{3x^2} \, \mathrm{d}t = -\frac{2}{3} t + C = -\frac{2}{3} \sqrt{1 - x^3} + C$$

20. $$\int \frac{x}{\sqrt{x + 1}} \, \mathrm{d}x$$

Con el cambio:

$$t^2 = x + 1$$
$$2t \, \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$$

resulta

$$\int \frac{x}{\sqrt{x + 1}} \, \mathrm{d}x = 2 \int \frac{x}{t} t \, \mathrm{d}t = 2 \int x \, \mathrm{d}t$$
$$= 2 \int \left(t^2 - 1\right) \, \mathrm{d}t = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) + C$$
$$= 2 \left(\frac{\sqrt{(x + 1)^3}}{3} - \sqrt{x + 1} \right) + C$$

9. Integrales (grupo F).

Ejercicio 1. *Calcular las siguientes integrales:*

- $\displaystyle\int x(\ln x)^2 \, \mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

Solución:

- Por partes:

$$u = (\ln x)^2 \qquad \mathrm{d}u = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = x \, \mathrm{d}x \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x(\ln x)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^2 - \int x \ln x \, \mathrm{d}x$$

Integrando de nuevo por partes:

$$u = \ln x \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = x \, \mathrm{d}x \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \int x(\ln x)^2 \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^2 - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{2} \int x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^2 - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C \end{aligned}$$

- Con el cambio de variable:

$$t^2 = x$$
$$2t \, \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$$

resulta

$$\begin{aligned} \int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x &= \int \frac{1-t}{1+t} 2t \, \mathrm{d}t \\ &= 2 \int \frac{t-t^2}{1+t} \, \mathrm{d}t \\ &= 2 \int \left(-t + 2 - \frac{2}{1+t} \right) \, \mathrm{d}t \\ &= 2 \left(-\frac{t^2}{2} + 2t - 2\ln|1+t| \right) + C \\ &= -t^2 + 4t - 4\ln|1+t| + C \\ &= -x + 4\sqrt{x} - 4\ln(1+\sqrt{x}) + C \end{aligned}$$

Ejercicio 2. *Calcular las siguientes integrales:*

$\diamond$ $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $\diamond$ $\displaystyle\int \frac{x}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$

Solución:

$\diamond$ El denominador no tiene raíces y la fracción no pude descomponerse en fracciones simples. Teniendo en cuenta que:

$$x^2+4x+5=(x+2)^2+1$$

tenemos que:

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4-6}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int \frac{6}{1+(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)-3\,\mathrm{artg}\,(x+2)+C\end{aligned}$$

$\diamond$ Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x}{(x-2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2} \qquad\Longrightarrow\qquad A=1\,,\ B=2$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+C\end{aligned}$$

Ejercicio 3.

$\diamond$ *Halla el punto en el que la función*

$$F(x)=\int_0^x \frac{t-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

alcanza su valor mínimo.

$\diamond$ *Calcular la integral definida*

$$\int_0^1 e^{-x}(x^2-1)\,\mathrm{d}x$$

Solución:

$\diamond$ Por el teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x)=\frac{x-1}{1+x^2}$$

La derivada se anula en $x=1$. Además, $F'(x)$ es negativa para $x<1$ y positiva para $x>1$. Por consiguiente, el mínimo de la función está en $x=1$.

◇ Calculemos una primitiva de la función. Por partes:

$$u = x^2 - 1 \qquad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = e^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad v = -e^{-x}$$

De forma que:

$$\int e^{-x}(x^2-1)\,\mathrm{d}x = -e^{-x}(x^2-1) + 2\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Integrando de nuevo por partes:

$$u = x \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = e^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad v = -e^{-x}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}\int e^{-x}(x^2-1)\,\mathrm{d}x &= -e^{-x}(x^2-1) + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= -e^{-x}(x^2-1) - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C\\ &= -e^{-x}\left(x^2+2x+1\right) + C\\ &= -(x+1)^2e^{-x} + C\end{aligned}$$

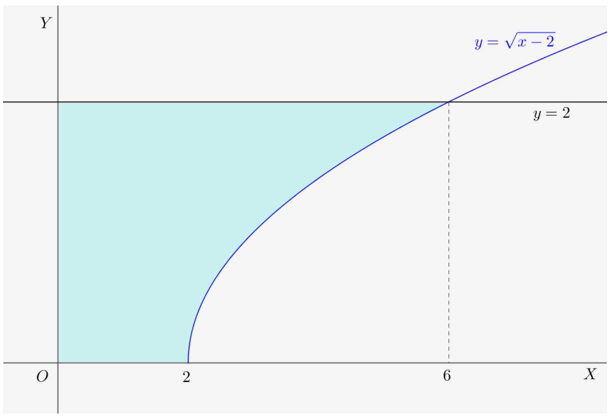
Por consiguiente:

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x}(x^2-1)\,\mathrm{d}x &= \left[-e^{-x}(x+1)^2\right]_0^1\\ &= -4e^{-1} - (-1)\\ &= 1 - \frac{4}{e}\end{aligned}$$

Ejercicio 4. *Hallar el área del recinto limitado por los ejes de coordenadas, la recta $y = 2$ y la curva cuya ecuación es $y = \sqrt{x-2}$.*

Solución:

El recinto se muestra en la siguiente figura:

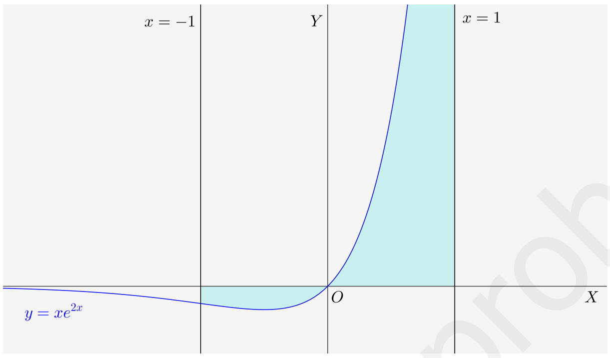


El área se puede calcular como diferencia del área del rectángulo menos el área bajo la gráfica de la función raíz cuadrada:

$$S = 12 - \int_2^6 \sqrt{x-2}\,\mathrm{d}x = 12 - \left[\frac{2\sqrt{(x-2)^3}}{3}\right]_2^6 = 12 - \frac{16}{3} = \frac{20}{3}$$

Ejercicio 5. *Dada la función $f(x) = xe^{2x}$ calcular el área comprendida entre el eje OX, la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.*

Solución:



Calculamos primero una primitiva. Por partes:

$$u = x \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = e^{2x}\,\mathrm{d}x \qquad v = \frac{1}{2}\,e^{2x}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}\int xe^{2x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\,xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\,xe^{2x} - \frac{1}{4}\,e^{2x} + C\end{aligned}$$

El problema para calcular el área es que la gráfica de la función corta al eje OX en el punto $x = 0$ que está en el intervalo $[0, 1]$. Por ello debemos calcular por separado el área de -1 a 0 y de 0 a 1:

$$\int_{-1}^0 xe^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,xe^{2x} - \frac{1}{4}\,e^{2x}\right]_{-1}^0 = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\,e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-2}\right) = \frac{3}{4e^2} - \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 xe^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,xe^{2x} - \frac{1}{4}\,e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,e^2 - \frac{1}{4}\,e^2 + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

La primera integral es negativa. El área correspondiente será igual a la integral cambiada de signo. Entonces:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2} + \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4e^2} + \frac{1}{2}$$

---

10. Integrales (grupo H)

Ejercicio 1. *Calcular las siguientes integrales:*

- ◇ $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\ \mathrm{d}x$
- ◇ $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+4)^3}\ \mathrm{d}x$

Solución:

◇ Por partes:

$$\begin{aligned} u &= \ln(x^2+1) \qquad & \mathrm{d}u &= \frac{2x}{x^2+1}\ \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= \ \mathrm{d}x & v &= x \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2+1)\ \mathrm{d}x &= x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}\ \mathrm{d}x \\ &= x\ln(x^2+1) - \int \left(2 - \frac{2}{x^2+1}\right)\ \mathrm{d}x \\ &= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\mathrm{artg}\ x + C \end{aligned}$$

◇ Con el cambio de variable:

$$\begin{aligned} t &= x^2+1 \\ \mathrm{d}t &= 2x\ \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}t}{2x} \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x^2+4)^3}\ \mathrm{d}x &= \int \frac{x}{t^3}\ \frac{\mathrm{d}t}{2x} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^3}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ \frac{-1}{2t^2} + C \\ &= -\frac{1}{4(x^2+1)^2} + C \end{aligned}$$

Ejercicio 2. *Calcular las siguientes integrales:*

- ◇ $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-2x+5}\ \mathrm{d}x$
- ◇ $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-x-2}\ \mathrm{d}x$

Solución:

◇ El denominador no tiene raíces. Teniendo en cuenta que:

$$x^2-2x+5 = (x-1)^2+4 = 2^2+(x-1)^2$$

se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+3}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+8}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{8}{2^2+(x-1)^2} \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5) + \frac{8}{2}\,\frac{1}{2}\operatorname{artg}\frac{x-1}{2} + C \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5) + 2\operatorname{artg}\frac{x-1}{2} + C
\end{aligned}$$

◇ Por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{x+5}{x^2-x-2} = \frac{x+5}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

Dando valores a x:

$$x=-1 \implies 4=-3A \implies A=-\frac{4}{3}$$

$$x=2 \implies 7=3B \implies B=\frac{7}{3}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+5}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{4}{3}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{7}{3}\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{4}{3}\ln|x+1| + \frac{7}{3}\ln|x-2| + C
\end{aligned}$$

Ejercicio 3. *Sea*

$$F(x) = \int_1^{x^2} \ln t\,\mathrm{d}t$$

Calcular $F'(e)$.

Solución:

De acuerdo con el teorema fundamental del cálculo integral:

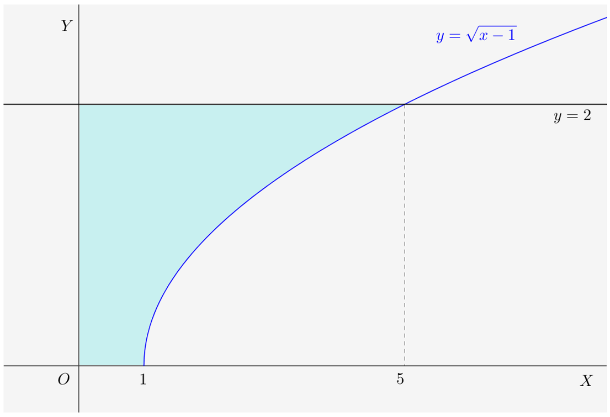
$$F'(x) = \ln(x^2)\cdot 2x = 4x\ln x$$

Por consiguiente:

$$F'(e) = 4e\ln e = 4e$$

Ejercicio 4. *Hallar el área del recinto limitado por los ejes de coordenadas, la recta* $y = 2$ *y la curva cuya ecuación es* $y = \sqrt{x-1}$.

Solución:



El área se puede calcular como diferencia del área del rectángulo menos el área bajo la gráfica de la función raíz cuadrada:

$$S = 10 - \int_1^5 \sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x = 10 - \left[\frac{2\sqrt{(x-1)^3}}{3}\right]_1^5 = 10 - \frac{16}{3} = \frac{14}{3}$$

Ejercicio 5. *Calcular el área comprendida entre la curva* $y = \sqrt{4-x^2}$ *y el eje* OX.

Solución:

Se trata de el área de un semicírculo de radio 2, o sea que el resultado debe ser 2π.

Vamos a calcularlo por integración. Los puntos de corte de la curva con el eje OX son:

$$\begin{cases} y = \sqrt{4-x^2} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad x = -2\,,\ x = 2$$

de forma que el área es igual a la integral

$$S = \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Esta integral se resuelve mediante el cambio de variable:

$$\begin{aligned} x &= 2\operatorname{sen} t \\ \mathrm{d}x &= 2\cos t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Con este cambio, los límites de la integral son:

$$x = -2 \quad \Longrightarrow \quad t = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = 2 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{\pi}{2}$$

El área es:

$$
\begin{aligned}
S = \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}\, 2\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\, 2\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{4(t+\operatorname{sen} t\cos t)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

11. Cálculo (grupo F)

Ejercicio 1. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}$$

se pide:

- *Estudiar y obtener las asíntotas.*
- *Estudiar los intervalos de concavidad y convexidad.*
- *Representar gráficamente la función.*

Solución:

- La recta $x = -5$ es asíntota vertical porque:

  $$\lim_{x \to -5} \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5} = -\infty$$

  Haciendo la división se obtiene de cociente $3x - 10$ y de resto 30. Entonces:

  $$\frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5} = 3x - 10 + \frac{50}{x + 5}$$

  Cuando x se hace muy grande, la función es aproximadamente igual a $3x - 10$. Así pues, la recta $y = 3x - 10$ es una asíntota oblicua de la función.

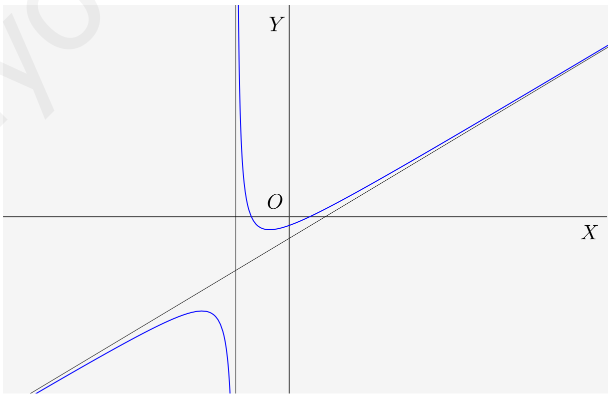
- Derivando se obtiene:

  $$y' = \frac{(6x + 5)(x + 5) - (3x^2 + 5x - 20)}{(x + 5)^2} = \frac{3x^2 + 30x + 45}{(x + 5)^2} = 3 \cdot \frac{x^2 + 10x + 15}{(x + 5)^2}$$

  $$y'' = 3 \cdot \frac{(2x + 10)(x + 5)^2 - 2(x + 5)(x^2 + 10x + 15)}{(x + 5)^4} = \frac{60}{(x + 5)^3}$$

  La derivada segunda es negativa para $x < -5$ y positiva para $x > -5$. La función es convexa en $(-\infty, -5)$ y cóncava en $(-5, \infty)$.

- Con los datos anteriores, la gráfica de la función es:



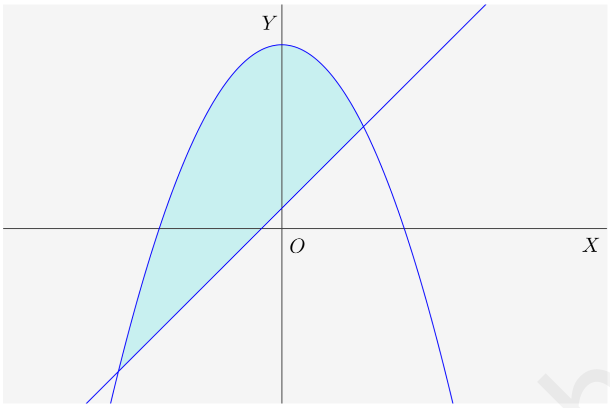
Ejercicio 2. *Dadas las funciones:*

$$y = 9 - x^2 \ ; \qquad y = 2x + 1$$

se pide:

- *Dibujar las gráficas de las dos funciones identificando el recinto acotado por ellas.*
- *Calcular el área de dicho recinto acotado.*
- *Hallar el volumen del cuerpo de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje OX el recinto acotado por la gráfica de $y = 9 - x^2$ y el eje OX.*

Solución:



Calculamos los puntos de corte entre las dos gráficas resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = 9 - x^2 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \implies x = -4\,; \quad x = 2$$

El área entre las gráficas es igual a la integral:

$$S = \int_{-4}^{2} \left(9 - x^2 - 2x - 1\right)\, \mathrm{d}x = \int_{-4}^{2} \left(-x^2 - 2x + 8\right)\, \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x\right]_{-4}^{2} = 36$$

La parábola corta al eje OX en los puntos de abscisas -3 y 3. El volumen que se pide es:

$$V = \pi \int_{-3}^{3} \left(9 - x^2\right)^2\, \mathrm{d}x = 2\pi \int_{-3}^{3} \left(x^4 - 18x^2 + 81\right)\, \mathrm{d}x = \frac{1296\pi}{5}$$

Ejercicio 3. *Dada la función:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} & \text{si } x > 0 \\ x + k & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

se pide:

- *Determinar el valor de k para que la función sea continua en $\mathbb{R}$.*
- *Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.*
- *Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto del abscisa $x = 1$.*

Solución:

- Para que la función sea continua deben coincidir los límites laterales en el punto 0. El límite por la izquierda es:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x + k) = k$$

Ahora debemos calcular el límite por la derecha. El numerador tiene un límite indeterminado del tipo $0 \cdot \infty$. Lo calculamos por la regla de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0} -2x^{\frac{1}{2}} = 0$$

Como el numerador tiende a cero:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} = 0$$

Para que f sea continua debe ser $k = 0$.

◇ Los puntos de intersección con los ejes son:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x \end{cases} \implies (0,0)\ ; \qquad \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} \end{cases} \implies (1,0)$$

◇ En el punto de abscisa $x_0 = 1$, la ordenada vale $y_0 = 0$. Para calcular la pendiente de la tangente derivamos:

$$x > 0 \implies f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{1}{x}\sqrt{x}\right)2^x - 2^x \ln 2\sqrt{x}\ln x}{2^{2x}}$$

La pendiente es:

$$m = f'(1) = \frac{1}{2}$$

y la ecuación de la tangente es:

$$y = \frac{1}{2}(x-1)$$

Ejercicio 4. *Si la derivada de la función $f(x)$ es:*

$$f'(x) = (x-1)^3(x-5)$$

obtener:

◇ *Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.*

◇ *Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.*

◇ *La función f sabiendo que $f(0) = 0$.*

Solución:

◇ El signo de la derivada está dado por:

$+$	0	$-$	0	$+$
	1		5	

La función es creciente en $(-\infty, 1)$, tiene un máximo relativo en $x = 1$, es decreciente en $(1, 5)$, tiene un mínimo relativo en $x = 5$ y es creciente en $(5, \infty)$.

◇ Derivamos:

$$f''(x) = 3(x-1)^2(x-5) + (x-1)^3 = (x-1)^2(3x - 15 + x - 1) = (x-1)^2(4x - 16)$$

La derivada segunda se anula en $x = 1$ y $x = 4$. El esquema de signos es como sigue:

	1		4	
$-$	0	$-$	0	$+$

Hay un punto de inflexión en $x = 4$.

◇ Para calcular $f(x)$ integramos $f'(x)$

$$\int (x-1)^3(x-5)\,\mathrm{d}x$$

Por partes:

$$\begin{aligned} u &= (x-5) & \mathrm{d}u &= \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= (x-1)^3\,\mathrm{d}x & v &= \frac{1}{4}(x-1)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = \int (x-1)^3(x-5)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}(x-5)(x-1)^4 - \frac{1}{4}\int (x-1)^4\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}(x-5)(x-1)^4 - \frac{1}{20}(x-1)^5 + C \end{aligned}$$

Puesto que $f(0) = 0$:

$$0 = \frac{1}{4}(-5)(-1)^4 - \frac{1}{20}(-1)^5 + C = -\frac{5}{4} + \frac{1}{20} + C \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{6}{5}$$

La función que buscamos es:

$$f(x) = \frac{1}{4}(x-5)(x-1)^4 - \frac{1}{20}(x-1)^5 + \frac{6}{5}$$

Ejercicio 5. *Dada la función*

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

se pide:

◇ *Dibujar la gráfica de f estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.*

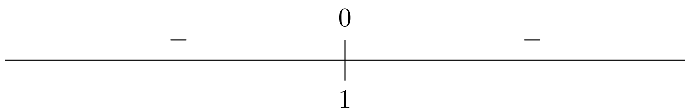
◇ *Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$.*

Solución:

Calculamos las derivadas:

$$f'(x) = -e^{-x}(x^2 + 1) + 2xe^{-x} = -e^{-x}(x^2 - 2x + 1) = -e^{-x}\,(x-1)^2$$

El signo de la derivada es:

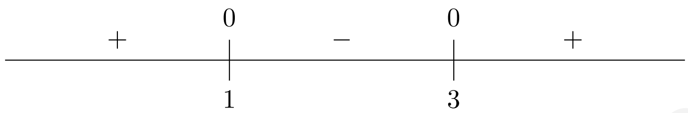


La función es siempre decreciente. En $x = 1$ hay un punto de tangente horizontal pero no es máximo ni mínimo.

Calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = e^{-x}(x-1)^2 - 2(x-1)e^{-x} = e^{-x}(x^2 - 4x + 3)$$

La derivada segunda se anula en $x = 1$ y $x = 3$. El signo según los valores de x es:



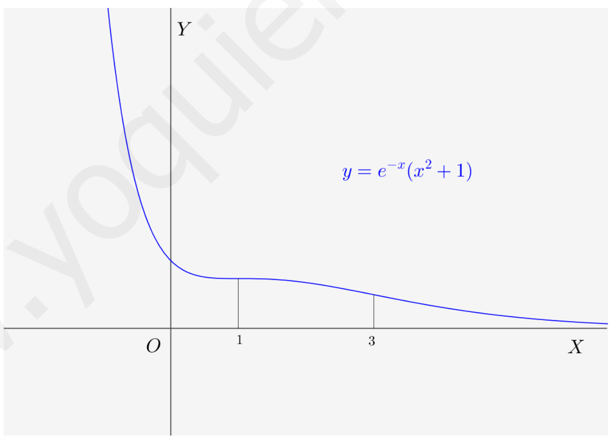
Hay puntos de inflexión en $x = 1$ y $x = 3$.

Puesto que:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}(x^2+1) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{e^x} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función en más infinito. No hay más asíntotas-

La gráfica de la función es:



La integral la calculamos por partes:

$$\begin{aligned} u &= x^2 + 1 & \mathrm{d}u &= 2x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= e^{-x}\,\mathrm{d}x & v &= -e^{-x} \end{aligned}$$

$$\int e^{-x}(x^2+1)\,\mathrm{d}x = -e^{-x}(x^2+1) + 2\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Integrando de nuevo por partes:

$$\begin{aligned} u &= x & \mathrm{d}u &= \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= e^{-x}\,\mathrm{d}x & v &= -e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int e^{-x}(x^2+1)\,\mathrm{d}x &= -e^{-x}(x^2+1)+2\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= -e^{-x}(x^2+1)+2\left(-xe^{-x}+\int e^{-x}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= -e^{-x}(x^2+1)-2xe^{-x}-2e^{-x}+C\end{aligned}$$

Entonces:

$$\int_0^1 e^{-x}(x^2+1)\,\mathrm{d}x = \Big[-e^{-x}(x^2+1)-2xe^{-x}-2e^{-x}\Big]_0^1 = 3-\frac{6}{e}$$

Ejercicio 6.

- *Calcular los siguientes límites:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^x-x^2\right), \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{4^x+5^x}{3^x+6^x}$$

- *Demostrar que la ecuación $4x^5+3x+m=0$ solo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número m. Justifica la respuesta indicando qué teoremas se usan.*

Solución:

- Calculemos el primer límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^x-x^2\right)=\lim_{x\to\infty} e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right)$$

Pero por la regla de l'Hopital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

Por consiguiente:

$$\lim_{x\to\infty}(e^x-x^2)=\lim_{x\to\infty}e^x\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right)=\lim_{x\to\infty}e^x=\infty$$

El segundo límite, dividiendo numerador y denominador por 6^x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4^x+5^x}{3^x+6^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{6}\right)^x+\left(\frac{5}{6}\right)^x}{\left(\frac{3}{6}\right)^x+\left(\frac{6}{6}\right)^x}=\frac{0+0}{0+1}=0$$

- Sea la función $F(x)=4x^5+3x+m$. El problema es equivalente a demostrar que esta función toma el valor cero para un único valor de la variable x. Esta función es continua y toma valores positivos y negativos, ya que:

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=-\infty\ ; \qquad \lim_{x\to\infty}F(x)=\infty$$

por tanto, de acuerdo con el teorema de Bolzano, debe tomar el valor cero para algún x. Este valor será solución de la ecuación.

La función $F(x)$ es, además de continua, derivable para todo x. La derivada es:

$$F'(x)=20x^4+3$$

La derivada es siempre positiva. Entonces, la función no puede tener dos ceros pues, según el teorema de Rolle, entre dos ceros de la función debería haber al menos un cero de la derivada. Como la derivada no tiene ceros, la función solo puede tomar el valor cero una vez: la solución de la ecuación es única.

Ejercicio 7. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

se pide:

- ⋄ *Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$.*
- ⋄ *Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado anterior con los dos ejes coordenados.*
- ⋄ *Hallar el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados sea mínima.*

Solución:

- ⋄ El punto de tangencia es $\left(a, \frac{1}{a}\right)$. La pendiente es la derivada en el punto a:

  $$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad m = -\frac{1}{a^2}$$

  La ecuación de la tangente es:

  $$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$$

- ⋄ El punto de corte A de esta recta con el eje de abscisas es:

  $$\begin{cases} y = 0 \\ y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A(2a, 0)$$

  y el punto de corte B con el eje de ordenadas:

  $$\begin{cases} x = 0 \\ y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad B\left(0, \frac{2}{a}\right)$$

- ⋄ La distancia entre los dos puntos es:

  $$D(a) = \sqrt{4a^2 + \frac{4}{a^2}} = 2\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} = 2\sqrt{\frac{a^4 + 1}{a^2}}$$

  Para hallar el mínimo derivamos e igualamos a cero:

  $$\frac{4a^3a^2 - 2a(a^4 + 1)}{a^4} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{4a^4 - 2a^4 - 2}{a^3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a^4 = 1$$

  Como nos piden la solución positiva, ésta es $a = 1$.

---

12. Cálculo (grupo H)

Ejercicio 1. *Obtener el valor de a para que:*

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}\right)^{ax^2} = 4$$

Solución:

Se trata de un límite indeterminado del tipo 1^∞. Mediante la equivalencia:

$$\lim_{u\to 1, v\to\infty} u^v = \lim_{u\to 1, v\to\infty} e^{(u-1)v}$$

se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3}{x^2+3}\right)^{ax^2} = \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x^2-3}{x^2+3}-1\right)ax^2} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-6ax^2}{x^2+3}} = e^{-6a}$$

Entonces:

$$e^{-6a} = 4 \quad\Longrightarrow\quad -6a = \ln 4 \quad\Longrightarrow\quad a = -\frac{\ln 4}{6}$$

Ejercicio 2.

- ◇ *Calcular la integral* $\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\,dx$
- ◇ *Hallar los valores mínimo y máximo absolutos de la función* $f(x) = \sqrt{12-3x^2}$.

Solución:

- ◇ Mediante el cambio de variable:

$$\begin{aligned} t^2 &= 4+5x^2 \\ 2t\,\mathrm{d}t = 10x\,\mathrm{d}x &\quad\Longrightarrow\quad x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}t\,\mathrm{d}t \\ x = 1 &\quad\Longrightarrow\quad t = 3 \\ x = 3 &\quad\Longrightarrow\quad t = 7 \end{aligned}$$

tenemos que:

$$\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\,dx = \frac{1}{5}\int_3^7 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\left[\frac{t^3}{3}\right]_3^7 = \frac{316}{15}$$

- ◇ El dominio de definición de la función es el intervalo $[-2,2]$. En los extremos del intervalo la función vale cero.

  La función tiene un máximo relativo en el punto $(0,\sqrt{12})$.

  El máximo y mínimo absoluto, o son máximo y mínimo relativo, o se encuentran en los extremos del intervalo. Teniendo esto en cuenta deducimos que el máximo absoluto se encuentra en $(0,\sqrt{12})$ y el mínimo absoluto está en los puntos $(-2,0)$ y $(2,0)$.

Ejercicio 3. *Dado el polinomio* $P(x) = x^3+ax^2+bx+c$*, obtener los valores de* a*,* b *y* c *de modo que se verifiquen las condiciones siguientes:*

- ◇ *El polinomio* $P(x)$ *tenga extremos relativos en los puntos de abscisas* $x = -\frac{1}{3}$*,* $x = -1$*.*
- ◇ *La recta tangente a la gráfica de* $P(x)$ *en el punto* $(0; P(0))$ *sea* $y = x+3$*.*

Solución:

Las condiciones equivalen a $P'\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$, $P'(-1) = 0$ y $P'(0) = 1$ y $P(0) = 3$.

La derivada de la función polinómica es:

$$P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

Tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{3}{9} - \frac{2a}{3} + b = 0 \\ 3 - 2a + b = 0 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases}$$

La solución de este sistema es $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$.

Ejercicio 4. *Dada la función $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 5)$, se pide:*

- *Determinar el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.*
- *Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.*

Solución:

- El dominio es la solución de la inecuación:

  $$x^2 + 4x - 5 > 0$$

  es decir $x \in (-\infty, -5) \cup (1, \infty)$.

  Hay asíntotas verticales en los puntos en que se anula el argumento de la función logarítmica, o sea, $x = -5$ y $x = 1$.

- La derivada de la función es:

  $$f'(x) = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x - 5}$$

  Esta función se anula en $x = -2$ que no pertenece al dominio. El signo de la derivada es:

$-$	0	$\nexists$	0	$+$
	-5		1	

  $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -5)$, no existe en $[-5, 1]$ y es creciente en $(1, \infty)$.

Ejercicio 5. *Se considera la función real de variable real definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x - 2} & \text{si } x \geq 2 \\ x(x - 2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

- *Estudiar su continuidad y derivabilidad.*
- *Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(3, 1)$.*

Solución:

- La función esta definida mediante funciones continuas en cada trozo. En $x = 2$, los límites laterales son:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} \sqrt[3]{x-2} = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} x(x-2) = 0 \\ f(2) &= 0 \end{aligned}$$

Los tres valores coinciden por lo que la función es continua.

Vamos a estudiar la derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} & x > 2 \\ 2x - 2 & x < 2 \end{cases}$$

Tenemos que $f'(2^+) = \infty$ y $f'(2^-) = 2$. La función no es derivable.

- La pendiente de la tangente en el punto de abscisa $x_0 = 3$ es:

$$m = f'(3) = \frac{1}{3}$$

La ecuación de la tangente es:

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x-3)$$

Ejercicio 6. *Calcular un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que verifica:*

- *Tiene un máximo relativo en $x = 1$.*
- *Tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas $(0, 1)$.*
- *Se verifica:*

$$\int_0^1 p(x)\, dx = \frac{5}{4}.$$

Solución:

En este caso las condiciones son $p'(1) = 0$, $p''(0) = 0$ y $p(0) = 1$. Además:

$$\left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx\right]_0^1 = \frac{5}{4}$$

]Derivando:

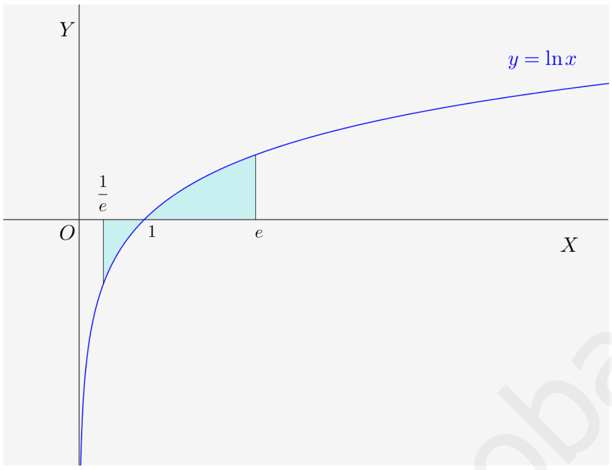
$$\begin{aligned} y' &= 3ax^2 + 2bx + c \\ y'' &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

Tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 2b = 0 \\ d = 1 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Este sistema tiene como solución $a = -\frac{1}{5}$, $b = 0$, $c = \frac{3}{5}$ y $d = 1$.

Ejercicio 7.

- *Representar gráficamente el recinto limitado por la gráfica de la función* $f(x) = \ln x$ *y el eje* OX *entre las abscisas* $x = \frac{1}{e}$ *y* $x = e$.
- *Calcular el área de dicho recinto.*
- *Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar dicho recinto alrededor del eje* OX.
- 

- Calculamos las integrales definidas:

$$I_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x \, \mathrm{d}x = \Big[x \ln x - x\Big]_{\frac{1}{e}}^{1} = -1 + \frac{2}{e}$$

que es negativa. La segunda integral es:

$$I_2 = \int_{1}^{e} \ln x \, \mathrm{d}x = \Big[x \ln x - x\Big]_{1}^{e} = 1$$

El área es:

$$S = -I_1 + I_2 = 1 - \frac{2}{e} + 1 = 2 - \frac{2}{e}$$

- Para calcular el volumen, debemos calcular primero la siguiente integral indefinida:

$$\int (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x$$

Por partes:

$$\begin{aligned} u &= (\ln x)^2 & \mathrm{d}u &= \frac{2}{x} \ln x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v &= \mathrm{d}x & v &= x \end{aligned}$$

$$\int (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x = x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x \, \mathrm{d}x = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$$

El volumen es:

$$V = \pi \int_{\frac{1}{e}}^{e} (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \Big[x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C\Big]_{\frac{1}{e}}^{e} = \pi \left(e - \frac{5}{e}\right)$$

13. Matrices y sistemas de ecuaciones (grupo F)

Ejercicio 1. *Resolver la ecuación:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ x & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ x & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & 4 \\ x+1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ x+1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 4 & -5 & 4 \\ x+1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ x+1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x+1 & 3 \end{vmatrix} = 8 \cdot (3 - x - 1) = 8 \cdot (2 - x)$$

Primero hemos puesto ceros y hemos desarrollado el determinante por la segunda columna. Después hemos puesto ceros y desarrollado por la tercera fila y hemos sacado factor común 4 de la primera fila.

Puesto que este determinante debe ser igual a cero:

$$8 \cdot (2 - x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

Ejercicio 2. *Calcula el rango de la matriz:*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & m+1 & m & m+1 \end{bmatrix}$$

según los valores de m.

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz formada por las tres primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix} = m^2 + 1 - m - 1 = m^2 - m$$

El determinante se anula para $m = 0$ y $m = 1$. Por consiguiente:

- ◇ $m \neq 0,\ m \neq 1$. El rango de la matriz es 3.
- ◇ $m = 0$. El rango de la matriz es:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

  puesto que hay tres columnas iguales.

◇ $m = 1$:

$$\text{rango}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 0\\1 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 1 & 2\end{bmatrix} = 3$$

Para calcular el rango hemos suprimido la segunda columna puesto que sabemos que, de las tres primeras, solo hay dos independientes. El determinante de la matriz es claramente distinto de cero luego el rango de la matriz es 3.

Ejercicio 3. *Averiguar para qué valores del parámetro k admite inversa la matriz A:*

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 0 & 1\\3 & 2 & k\end{bmatrix}$$

y halla la inversa de A para $k = 1$.

Solución:

Para que la matriz tenga inversa, su determinante debe ser distinto de cero. El determinante es:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 0 & 1\\3 & 2 & k\end{vmatrix} = -4 + 6 - 2 - 4k = -4k$$

El determinante es cero para $k = 0$. Por consiguiente, existe la inversa de A siempre que $k \neq 0$.

Para $k = 1$ el determinante de la matriz es -4. La matriz adjunta es:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix}-2 & 1 & 4\\-4 & 4 & 4\\2 & -3 & 4\end{bmatrix}$$

Trasponemos:

$$\text{adj } A^t = \begin{bmatrix}-2 & -4 & 2\\1 & 4 & -3\\4 & 4 & -4\end{bmatrix}$$

y dividiendo por el determinante, obtenemos finalmente la inversa:

$$A^{-1} = \frac{-1}{4}\begin{bmatrix}-2 & -4 & 2\\1 & 4 & -3\\4 & 4 & -4\end{bmatrix}$$

Ejercicio 4. *Resuelve la ecuación matricial $B(2A + I) = AXA + B$, siendo:*

$$A = \begin{bmatrix}3 & -2 & -1\\-4 & 1 & -1\\2 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\-1 & 0 & -1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

Solución:

Para despejar la matriz X calculamos en primer lugar la inversa de A. Procediendo como en el problema anterior:

$$\begin{vmatrix}3 & -2 & -1\\-4 & 1 & -1\\2 & 0 & 1\end{vmatrix} = 3 + 4 + 2 - 8 = 1$$

La matriz adjunta es:

$$\text{adj}\, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} \implies \text{adj}\, A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

y

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} AXA + B = B(2A + I) &\implies AXA = B(2A + I) - B \\ &\implies AXA = 2BA + B - B \\ &\implies AXA = 2BA \qquad \text{multiplicando a ambos lados por } A^{-1} \\ &\implies A^{-1}AXAA^{-1} = 2A^{-1}BAA^{-1} \\ &\implies X = 2A^{-1}B \end{aligned}$$

Por tanto

$$X = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 6 \\ -6 & -18 & 12 \\ 4 & 14 & -10 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5. *Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real k:*

$$\begin{cases} x - y + kz = 1 \\ 2x - ky + z = 2 \\ x - y - z = k - 1 \end{cases}$$

se pide:

- ⋄ *Discútase el sistema según los valores de k.*
- ⋄ *Resuélvase el sistema para el valor de k para el cual el sistema tiene infinitas soluciones.*

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 0 & 0 & k+1 \end{vmatrix} = (k+1)(-k+2)$$

El determinante se hace cero para $k = -1$ y $k = 2$. Pueden presentarse los siguientes casos:

- ⋄ $k \neq -1$ y $k \neq 2$ rango A = rango $A^* = 3$. El sistema es compatible determinado.
- ⋄ $k = -1$

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 3$$

Hemos suprimido la tercera columna que era igual que la segunda; después hemos restado la primera fila a la tercera. Claramente, el determinante de la matriz que resulta es distinta de cero con lo que el rango de la matriz ampliada es 3. Como en este caso la matriz de coeficientes tiene rango 2, el sistema es incompatible.

- Para $k=2$:
$$\text{rango}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\text{rango}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\text{rango}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=2$$
Hemos suprimido la segunda columna que es igual a la primera cambiada de signo y la última columna que es igual que la primera. Ambas matrices tienen rango 2 y el sistema es compatible indeterminado.

Vamos a resolver el sistema para $k=2$. Busquemos en la matriz de coeficientes
$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$
un determinante de orden 2 distinto de cero. Lo encontramos en las dos primeras filas tomando la columna primera y tercera. Eliminamos la tercera ecuación con lo que el sistema queda:
$$\begin{cases}x-y+2z=1\\ 2x-2y+z=2\end{cases}$$
La incógnita y que quedaba fuera del determinante la pasamos al segundo miembro como parámetro t:
$$\begin{cases}x+2z=1+t\\ 2x+z=2+2t\end{cases}$$
Resolvemos por la regla de Cramer:
$$x=\frac{\begin{vmatrix}1+t & 2\\ 2+2t & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{1+t-4-4t}{1-4}=\frac{-3-3t}{-3}=1+t$$
$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1+t\\ 2 & 2+2t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{2+2t-2-2t}{1-4}=\frac{0}{-3}=0$$
Así pues, la solución es $(1+t,t,0)$

Ejercicio 6. *Dado el sistema:*
$$\begin{cases}\lambda x+2y+z &= 0\\ \lambda x-y+2z &= 0\\ x-\lambda y+2z &= 0\end{cases}$$
se pide:

- *Obtener los valores del parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de $x=y=z=0$.*
- *Resolver el sistema para $\lambda=5$.*

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:
$$\begin{vmatrix}\lambda & 2 & 1\\ \lambda & -1 & 2\\ 1 & -\lambda & 2\end{vmatrix}=-2\lambda-\lambda^2+4+1+2\lambda^2-4\lambda=\lambda^2-6\lambda+5$$

El determinante es cero para:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$

- ◇ Para $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 5$ el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada es 3. El sistema es compatible determinado y solamente tiene la solución trivial $x = y = z = 0$.
- ◇ Para $\lambda = 1$ o $\lambda = 5$ el sistema tiene soluciones distintas de la trivial puesto que es compatible indeterminado.

Para $\lambda = 5$ tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ 5x - y + 2z = 0 \\ x - 5y + 2z = 0 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes tiene rango 2. Buscamos un determinante de orden 2 distinto de 0, por ejemplo, el formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas. La tercera ecuación, que no forma parte del determinante, la eliminamos. La incógnita z la pasamos al segundo miembro como parámetro $z = t$. Así resulta el sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y = -t \\ 5x - y = -2t \end{cases}$$

Resolvemos por la regla de Cramer y obtenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -t & 2 \\ -2t & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{5t}{-15} = \frac{-t}{3} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -t \\ 5 & -2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-5t}{-15} = \frac{t}{3}$$

La solución general del sistema es:

$$\left(\frac{-t}{3},\ \frac{t}{3},\ t \right)$$

o multiplicando por 3 (ya que el sistema es homogéneo):

$$(-t,\ t,\ 3t)$$

14. Matrices y determinantes (grupo H)

Ejercicio 1. *Dada la matriz:*

$$M=\begin{bmatrix}2 & 1 & -a\\ 2a & 1 & -1\\ 2 & a & 1\end{bmatrix}$$

- *Determinar el rango de M según los valores del parámetro a.*
- *Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcular dicha matriz inversa para $a=2$.*

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz M:

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & -a\\ 2a & 1 & -1\\ 2 & a & 1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & 1 & -a\\ a & 1 & -1\\ 1 & a & 1\end{vmatrix}=2\left(1-a^3-1+a+a-a\right)=2\left(-a^3+a\right)=-2a\left(a^2-1\right)$$

El determinante se anula para $a=0$, $a=-1$ y $a=1$. Pueden darse los siguientes casos:

(a) $a\neq 0$, $a\neq -1$ y $a\neq 1$. El determinante es distinto de 0 y el rango de la matriz es 3.

(b) Si $a=0$:

$$\operatorname{rango}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}=2$$

(c) Si $a=-1$:

$$\operatorname{rango}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}=2$$

(d) Si $a=1$:

$$\operatorname{rango}\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}=2$$

La matriz inversa existe cuando el determinante es distinto de 0, es decir, para $a\neq 0$, $a\neq -1$ y $a\neq 1$.

Calculemos ahora la matriz inversa para $a=2$:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ 4 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\quad ;\qquad |A|=-12$$

Calculamos la matriz adjunta:

$$\operatorname{adj}A=\begin{bmatrix}3 & -6 & 6\\ -5 & 6 & -2\\ 1 & -6 & -2\end{bmatrix}$$

La matriz inversa es:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A^t=-\frac{1}{12}\begin{bmatrix}3 & -5 & 1\\ -6 & 6 & -6\\ 6 & -2 & -2\end{bmatrix}$$

Ejercicio 2. *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se pide:

- ⋄ *Hallar A^{-1}.*
- ⋄ *Hallar la matriz X tal que $AXA^t = B$ donde A^t significa la traspuesta de A.*

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

y la matriz adjunta:

$$\operatorname{adj} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Despejamos:

$$\begin{aligned} &AXA^t = B \\ &A^{-1}AXA^t\left(A^t\right)^{-1} = A^{-1}B\left(A^t\right)^{-1} \\ &X = A^{-1}B\left(A^t\right)^{-1} \end{aligned}$$

puesto que la traspuesta de la inversa es igual a la inversa de la traspuesta, tenemos que:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3. *Dado el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + y + z = k \\ (k-1)x - 2y - z = k+1 \end{cases}$$

se pide:

- ⋄ *Discutirlo según los distintos valores del parámetro k.*
- ⋄ *Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.*

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2k-1 & k-3 & 0 \\ 2k-1 & -1 & 0 \\ k-1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (2k-1)(k-2)$$

El determinante se anula para $k = \frac{1}{2}$ y $k = 2$. Pueden darse los siguientes casos:

(I) Si $k \neq \frac{1}{2}$ y $k \neq 2$ el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada es 3. El sistema es compatible indeterminado.

(II) Si $k = \frac{1}{2}$. El rango de la matriz de coeficientes es 2. En cuanto a la matriz ampliada:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \end{bmatrix} = 3$$

Para calcular el rango, hemos suprimido una columna, pues sabemos que de las tres primeras sólo hay dos independientes. Hemos multiplicado la primera y tercera columna por 2 para trabajar con números enteros. Finalmente, haciendo el determinante de la matriz resultante, se comprueba que es distinto de cero y, por consiguiente, el rango de la matriz es 3.

En este caso el sistema es incompatible.

(III) Para $k = 2$ el rango de la matriz de coeficientes es 2. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} = 2$$

Como en el caso anterior, hemos suprimido una columna de las tres primeras. Después hemos puesto ceros en la primera fila. Claramente, el determinante de la matriz resultante es cero y el rango de la matriz es 2.

Resolvamos el sistema. Hay dos ecuaciones independientes. Nos quedamos con las dos primeras y tomamos $z = t$ como parámetro. Resulta el sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = -1 - 2t \\ 2x + y = 2 - t \end{cases}$$

Resolviendo por la regla de Cramer resulta la solución $\left(\frac{7-t}{5}, \frac{-4-3t}{5}, t\right)$.

Ejercicio 4. *Dado el sistema homogéneo:*

$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ kx - y + z = 0 \\ (k+1)x + y = 0 \end{cases}$$

averiguar para qué valores de k tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$. Resolverlo en esos casos.

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -k + k(k+1) - (k+1) - 1 = k^2 - k - 2$$

El determinante se anula para $k = -1$ y para $k = 2$. Pueden darse los siguientes casos:

(I) Para $k \neq -1$ y $k \neq 2$ el rango de la matriz es 3. El sistema es compatible determinado y solamente admite la solución trivial $x = y = z = 0$.

(II) Para $x = -1$ la matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El rango es 2. Hay dos ecuaciones independientes. Podemos quedarnos, por ejemplo, con las dos últimas. Tomando $z = t$ como parámetro resulta el sistema:

$$\begin{cases} -x - y = -t \\ y = 0 \end{cases}$$

que tiene como solución $(t, 0, t)$.

(III) Para $k = 2$ la matriz es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz es 2. Las dos últimas filas son independientes. Tomando $z = t$ como parámetro resulta el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = -t \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

Resolvemos por la regla de Cramer y obtenemos la solución $\left(-\frac{t}{5}, \frac{3t}{5}, t\right)$.

Ejercicio 5.

(a) *Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la igualdad $A+B = AB$. Comprobar que entonces se tiene la fórmula:*

$$(I - B)^{-1} = -B^{-1}A$$

donde I denota la matriz identidad.

(b) *Dada la matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

hallar la matriz B para la cual se verifica $A + B = AB$.

Solución:

(a) De $A + B = AB$ se deduce que:

$$\begin{aligned} &A + B = AB \\ &A - AB = -B \\ &A(I - B) = -B \\ &A = -B(I - B)^{-1} \end{aligned}$$

Entonces:

$$-B^{-1}A = -\cancel{B^{-1}}(-\cancel{B}(I - B)^{-1}) = (I - B)^{-1}$$

(b) Despejamos ahora la matriz B:

$$\begin{aligned} &A+B=AB \\ &B-AB=-A \\ &(I-A)B=-A \\ &B=-(I-A)^{-1}A \end{aligned}$$

Puesto que:

$$I-A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} B&=-\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix} \\ &=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix} \\ &=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix} \end{aligned}$$

15. Segundo examen de matrices y sistemas (grupo H)

Ejercicio 1. *Dadas las matrices* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *y* $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$

- ◇ *Obtener las relaciones que deben cumplir* x, y, z *y* t *para que la matriz* X *verifique* $AX = XA$.
- ◇ *Dar un ejemplo de matriz* X *distinta de la matriz nula y de la matriz identidad que cumpla la igualdad anterior.*
- ◇ *Calcular la inversa de la matriz* A.

Solución:

◇ Debe cumplirse:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando los productos:

$$\begin{aligned} x + 2z &= x + 2y \\ y + 2t &= 2x + y \\ 2x + z &= z + 2t \\ 2y + t &= 2z + t \end{aligned}$$

Es decir $y = z$ y $x = t$. Las matrices que conmutan con la matriz dada tienen la forma:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$$

◇ Una matriz de esta forma sería:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

◇ La inversa de la matriz A es:

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2. *De las matrices cuadradas* A *y* B *se sabe que:*

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} ; \qquad A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

se pide:

- ◇ *Calcular la matriz* $A - B$.
- ◇ *Calcular las matrices* A *y* B.

Solución:

◇ Teniendo en cuenta que:

$$A^2 - AB + BA - B^2 = A(A - B) + B(A - B) = (A + B)(A - B)$$

tenemos que

$$A^2-AB+BA-B^2=(A+B)(A-B)=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\2&-1&0\end{bmatrix}\implies A-B=(A+B)^{-1}\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\2&-1&0\end{bmatrix}$$

Calculamos la inversa de $A+B$ y resulta:

$$(A+B)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0&2&0\\4&-4&0\\0&1&2\end{bmatrix}$$

de modo que:

$$A-B=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0&2&0\\4&-4&0\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\2&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-2&-2&0\\-1&2&0\end{bmatrix}$$

◇ Conocidas la suma y la diferencia es sencillo calcular las matrices:

$$A=\frac{1}{2}\left[(A+B)+(A-B)\right]\ ;\qquad B=\frac{1}{2}\left[(A+B)-(A-B)\right]$$

Así:

$$A=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}2&1&0\\2&0&0\\-1&0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&0\\-2&-2&0\\-1&2&0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

$$B=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}2&1&0\\2&0&0\\-1&0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1&0\\-2&-2&0\\-1&2&0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

Ejercicio 3. *Dado el sistema:*

$$\begin{cases}x+2y+(m+3)z=3\\x+y+(4+m-m^2)z=3\\2x+4y+3(m+2)z=8\end{cases}$$

se pide:

- ◇ *Discutirlo según los valores del parámetro m.*
- ◇ *Resolverlo para $m=-2$.*

Solución:

◇ Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix}1&2&m+3\\1&1&4+m-m^2\\2&4&3(m+2)\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=3(m+2)+4(m+3)+4(4+m-m^2)-2(m+3)-4(4+m-m^2)-6(m+2)\\&=-m\end{aligned}$$

Tenemos que para $m\neq 0$ el rango de ambas matrices es 3 y el sistema es compatible determinado.

Para $m=0$ el rango de la matriz de coeficientes es 2. En cuanto a la matriz ampliada:

$$\text{rango}\begin{bmatrix}1&2&3&3\\1&1&4&3\\2&4&6&8\end{bmatrix}=\text{rango}\begin{bmatrix}1&2&3\\1&1&3\\2&4&8\end{bmatrix}=\text{rango}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&0\\2&4&8\end{bmatrix}=3$$

Hemos suprimido una de las tres primeras columnas puesto que sabemos que solamente dos son independientes. Después hemos restado la primera fila a la segunda. El determinante de la matriz que resulta es claramente distinto de cero y, por consiguiente, el rango es 3. Para $m=0$ el sistema es incompatible.

- Para $m=-2$ resulta el sistema:

$$\begin{cases}x+2y+\ \ z&=3\\x+\ \ y-2z&=3\\x+2y&=4\end{cases}$$

que sabemos que es compatible determinado. La solución es $x=-2,\ y=3,\ z=-1$.

Ejercicio 4. *Estudia el siguiente sistema según los valores del parámetro a y resuélvelo cuando sea posible:*

$$\begin{cases}x+\ \ y+\ \ 3z&=0\\2x+ay+\ \ 3z&=0\\3x+2y+6az&=0\end{cases}$$

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix}1&1&3\\2&a&3\\3&2&6a\end{vmatrix}=6a^2+12+9-9a-6-12a=6a^2-21a+15$$

Los valores de a que anulan el determinante son $a=1$ y $a=\frac{5}{2}$. Entonces:

- Para $a\neq 1$ y $a\neq\frac{5}{2}$ el rango de la matriz es 3. El sistema es compatible determinado. Como el sistema es homogéneo su solución es la trivial $x=y=z=0$.
- Para $a=1$ el rango es 2. El sistema es equivalente a:

$$\begin{cases}x+y+3z&=0\\2x+y+3z&=0\end{cases}$$

Tomando z como parámetro resulta la solución $(0,-3\lambda,\lambda)$.

- Para $a=\frac{5}{2}$, el rango de la matriz también es 2. El sistema es equivalente a:

$$\begin{cases}x+\ \ y+3z&=0\\2x+\frac{5}{2}y+3z&=0\end{cases}$$

o quitando denominadores:

$$\begin{cases}x+\ \ y+3z&=0\\4x+5y+6z&=0\end{cases}$$

Tomando $z=\lambda$ como parámetro y resolviendo se obtiene la solución $(-9\lambda,6\lambda,\lambda)$.

---

16. Segundo examen de matrices y sistemas (grupo F)

Ejercicio 1. *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se pide:

- ⋄ *Hallar dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$.*
- ⋄ *Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.*
- ⋄ *Hallar todas las matrices X que satisfacen $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$.*

Solución:

- ⋄ Calculamos A^2:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es evidente que:

$$A^2 = 2A - I$$

- ⋄ Aplicando el resultado anterior:

$$\begin{aligned} A^5 &= A^2 A^2 A \\ &= (2A - I)(2A - I)A \\ &= (4A^2 - 2AI - 2IA + I^2)A \\ &= (8A - 4I - 4A + I)A \\ &= (4A - 3I)A \\ &= 4A^2 - 3A \\ &= 8A - 4I - 3A \\ &= 5A - 4I \\ &= 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- ⋄ Si:

$$(A - X)(A + X) = A^2 + AX - XA - X^2 = A^2 - X^2 \quad \Longrightarrow \quad AX = XA$$

Se trata de calcular las matrices que conmutan con A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x + 2z = x \\ y + 2t = 2x + y \\ z = z \\ t = 2z + t \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = t \\ z = 0 \end{cases}$$

Las matrices que conmutan con A son las de la forma $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$.

Ejercicio 2. *Dado el sistema:*

$$\begin{cases} (m+3)x + 2y + \ \ z &= 3 \\ (4+m-m^2)x + \ \ y + \ \ z &= 3 \\ 3(m+2)x + 4y + 2z &= 8 \end{cases}$$

se pide:

- ⋄ *Discutirlo según los valores del parámetro m.*
- ⋄ *Resolverlo para $m = -2$.*

Solución:

Ver la sección anterior. El sistema es el mismo intercambiando las incógnitas.

Ejercicio 3. *Estudia el siguiente sistema según los valores del parámetro a y resuélvelo cuando sea posible:*

$$\begin{cases} 3x + \ \ y + \ \ z &= 0 \\ 3x + 2y + az &= 0 \\ 6ax + 3y + 2z &= 0 \end{cases}$$

Solución:

Ver la sección anterior. El sistema es el mismo intercambiando las incógnitas.

Ejercicio 4. *Dada la matriz:*

$$A = \begin{bmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{bmatrix}$$

se pide:

- ⋄ *Estudiar el rango de A según los valores del parámetro m.*
- ⋄ *En el caso $m = 0$, resolver el sistema*

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

- ⋄ Calculamos el determinante de las tres primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} m-1 & 1 & m \\ 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(m-1)^2 + m + m - m(m-1) - m(m-1) - 2 = 0$$

Esto quiere decir que las tres primeras columnas son dependientes para todo valor de m. Efectivamente, la tercera columna es la suma de las dos primeras. Para obtener el rango calculamos el determinante de las columnas primera, segunda y cuarta:

$$\begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m-1 & 1 \\ m+1 & 1 & m-1 \end{vmatrix}$$

$$= (m+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix}$$

$$= (m+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-2 & 0 \\ 0 & 0 & m-2 \end{vmatrix}$$

$$= (m+1)(m-2)^2$$

Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$ el rango de la matriz es 3.

Si $m = -1$:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = 2$$

puesto que la cuarta columna es combinación lineal de la tercera y de las tres primeras solo hay dos independientes.

Para $m = 2$:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

◇ El sistema que resulta es:

$$\begin{cases} -x + y \qquad + t = 0 \\ \quad x - y \qquad + t = 0 \\ \quad x + y + 2z - t = 0 \end{cases}$$

que es un sistema homogéneo compatible indeterminado. De las dos primeras ecuaciones se deduce que $t = 0$ y que $x = y$. Tomando $z = \lambda$ como parámetro obtenemos la solución $(-\lambda, -\lambda, \lambda, 0)$.

17. Primer examen de Geometría (grupo F)

Ejercicio 1. *Calcular la ecuación continua de la recta:*

$$r:\begin{cases} x+y-2z=3\\ 3x-y+z=0\end{cases}$$

Solución:

El vector director de la recta es el producto vectorial de los dos vectores normales:

$$\overrightarrow{u}=(1,1,-2)\times(3,-1,1)=(-1,-7,-4)$$

Puede tomarse como vector director $\overrightarrow{v}=(1,7,4)$. Para calcular la ecuación de la recta debemos obtener un punto. Dando el valor $x=0$ resulta el sistema:

$$\begin{cases} y-2z=3\\ -y+z=0\end{cases} \implies y=-3, z=-3$$

Entonces, un punto e la recta es $P(0,-3,-3)$. Con el punto y el vector director podems escribir la ecuación continua de la recta:

$$\frac{x}{1}=\frac{y+3}{7}=\frac{z+3}{4}$$

Otro procedimiento es resolver el sistema formado por las ecuaciones implícitas de la recta. Tomando $x=\lambda$ como párametro, resulta:

$$\begin{cases} y-2z=3-\lambda\\ -y+z=-3\lambda\end{cases} \implies y=\frac{1}{-1}\begin{vmatrix}3-\lambda & -2\\ -3\lambda & 1\end{vmatrix}=7\lambda-3;\quad z=\frac{1}{-1}\begin{vmatrix}1 & 3-\lambda\\ -1 & -3\lambda\end{vmatrix}=4\lambda-3$$

así, las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\begin{cases} x=\lambda\\ y=7\lambda-3\\ z=4\lambda-3\end{cases}$$

y despejando λ en las tres ecuaciones e igualando resulta la ecuación continua.

Ejercicio 2. *Calcular el valor de m para que los puntos $A(0,1,2)$, $B(1,0,3)$, $C(1,m,1)$ y $D(m,-1,2m)$ pertenezcan a un mismo plano.*

Solución:

Si los puntos son coplanarios, los vectores $\overrightarrow{AB}=(1,-1,1)$, $\overrightarrow{AC}=(1,m-1,-1)$ y $\overrightarrow{AC}=(m,-2,2m-2)$ son linealmente dependientes y, por consiguiente:

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & m-1 & -1\\ m & -2 & 2m-2\end{vmatrix}=0 \implies m=-2,\ m=2$$

Ejercicio 3. *Considera las rectas:*

$$r\colon\begin{cases} x+y+z+3=0\\ x-y-z-1=0\end{cases}\quad;\qquad s\colon\frac{x+1}{2}=y+1=\frac{z+d}{-2}$$

Halla el valor de d para que las rectas sean secantes.

Solución:

Calculamos un punto y un vector director de la recta r. Dando por ejemplo a z el valor cero resulta:

$$\begin{cases} x+y=-3 \\ x-y=1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x=-1,\ y=-2$$

Un punto de la recta r es $P(-1,-2,0)$. El vector director es el producto vectorial:

$$\vec{u}=(1,1,1)\times(1,-1,-1)=(0,2,-2)$$

Para la recta s un punto es $Q(-1,-1,-d)$ y un vector director es $\vec{v}=(2,1,-2)$. Si las rectas se cortan, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente dependientes y se verifica que:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -d \end{vmatrix}=0 \qquad \Longrightarrow \qquad -2d+2=0 \qquad \Longrightarrow \qquad d=1$$

Ejercicio 4. *Halla el plano que contiene la recta*

$$s\colon\ -x=y-2=1-z$$

y el punto $A(3,1,6)$.

Solución:

Un punto de la recta es $P(0,2,1)$ y un vector director $\vec{u}=(-1,1,-1)$. (Atención, la recta NO está dada en forma continua puesto que los coeficientes de x y z no son iguales a 1). Tomando como punto del plano A y como vectores directores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{AP}=(-3,1,-5)$, la ecuación del plano en forma de determinante es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & -1 & -3 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-6 & -1 & -5 \end{vmatrix}=0 \qquad \Longrightarrow \qquad 2x+y-z-1=0$$

Ejercicio 5. *Calcular el plano π perpendicular a la recta*

$$x-1=y-2=\frac{z}{6}$$

y que pasa por el punto $(0,0,1)$.

Solución:

El vector director de la recta $\vec{u}=(1,1,6)$ es normal al plano que nos piden. La ecuación de este plano es:

$$1\cdot(x-0)+1\cdot(y-0)+6\cdot(z-1)=0 \qquad \Longrightarrow \qquad x+y+6z-6=0$$

Ejercicio 6. *Calcular la ecuación del plano determinado por las rectas:*

$$r\colon x=\frac{y}{3}=\frac{3-z}{2}; \qquad s\colon \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda-1 \\ z=3-\lambda \end{cases}$$

Solución:

Hay que suponer que las rectas se cortan, pues, si se cruzan no determinan ningún plano. Tomamos como vectores directores del plano los de las rectas y como punto, uno de cualquiera de las dos rectas. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 3 & 1 \\ z-3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x + y + 2z - 6 = 0$$

Ejercicio 7. *Calcular la ecuación de la recta perpendicular al plano* $\pi\colon 2x - 3y + 5z - 1 = 0$ *y que pasa por el punto* $A(2, 2, 3)$.

Solución:

El vector normal al plano es vector directo de la recta. La ecuación de ésta es:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{5}$$

Ejercicio 8. *Estudia la posición relativa de las rectas* r *y* s *siendo:*

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = 2\lambda + 2 \end{cases} \quad ; \quad s\colon \begin{cases} x = 1 \\ z = y + 2 \end{cases}$$

Solución:

La segunda recta puede escribirse en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \mu \\ z = 2 + \mu \end{cases}$$

Un punto de la primera recta es $P(1, 0, 2)$ y también es de la segunda para $\mu = 0$. Como tienen un punto en común y sus vectores directores son diferentes, las rectas son secantes.

Ejercicio 9. Dadas las rectas:

$$r\colon \begin{cases} x - kz = 2 \\ y - z = -3 \end{cases} \quad ; \quad s\colon \frac{x-1}{2} = y + 1 = z$$

¿Existe algún valor de k que haga que estas rectas sean secantes?

Solución:

La ecuación de la recta r en forma paramétrica es:

$$\begin{cases} x = 2 + k\lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto de esta recta es $P(2,-3,0)$ y un vector director $\vec{u}=(k,1,1)$. Para la segunda recta, el punto es $Q(1,-1,0)$ y el vector director $\vec{v}=(2,1,1)$. Como en el problema anterior, para que las rectas se corten, el siguiente determinante debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} k & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad k=2$$

Sin embargo, para este valor de k las rectas son paralelas. No existe ningún k que haga que las rectas se corten.

Ejercicio 10. *Calcular la ecuación de la perpendicular común a las rectas:*

$$r_1: \ \frac{x}{-3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{2}\ ; \qquad r_2: \ \frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+3}{-1}$$

Solución:

El vector director de la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,1)$$

El plano que contiene a r_1 y a la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y-2 & 1 & 1 \\ z-2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -x+5(y-2)-4(z-2)=0 \quad \Longrightarrow \quad -x+5y-4z-2=0$$

El plano que contiene a r_2 y a la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 1 \\ y & -1 & 1 \\ z+3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -3y+3(z+3)=0 \quad \Longrightarrow \quad -y+z+3=0$$

La ecuación como intersección de planos de la perpendicular común es:

$$\begin{cases} -x+5y-4z-2=0 \\ -y+z+3=0 \end{cases}$$

---

18. Primer examen de Geometría (grupo H)

Ejercicio 1. Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$r: \begin{cases} x+y-2z=3 \\ 3x-y+z=0 \end{cases}$$

Solución:

El vector director de la recta es el producto vectorial de los dos vectores normales:

$$\vec{u}=(1,1,-2)\times(3,-1,1)=(-1,-7,-4)$$

Puede tomarse como vector director $\overrightarrow{v}=(1,7,4)$. Para calcular las ecuaciones paramétricas de la recta debemos obtener un punto. Dando el valor $x=0$ resulta el sistema:

$$\begin{cases} y-2z=3 \\ -y+z=0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad y=-3, z=-3$$

Entonces, un punto e la recta es $P(0,-3,-3)$. Con el punto y el vector director podemos escribir las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=-3+7\lambda \\ z=-3+4\lambda \end{cases}$$

Otro procedimiento es resolver el sistema formado por las ecuaciones implícitas de la recta. Tomando $x=\lambda$ como parámetro, resulta:

$$\begin{cases} y-2z=3-\lambda \\ -y+z=-3\lambda \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad y=\frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -3\lambda & 1 \end{vmatrix}=7\lambda-3; \quad z=\frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 1 & 3-\lambda \\ -1 & -3\lambda \end{vmatrix}=4\lambda-3$$

así, las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=7\lambda-3 \\ z=4\lambda-3 \end{cases}$$

Ejercicio 2. *Calcular el valor de m para que los puntos $A(0,1,2)$, $B(1,0,3)$, $C(1,m,1)$ y $D(m,-1,2m)$ pertenezcan a un mismo plano.*

Solución:

Si los puntos son coplanarios, los vectores $\overrightarrow{AB}=(1,-1,1)$, $\overrightarrow{AC}=(1,m-1,-1)$ y $\overrightarrow{AC}=(m,-2,2m-2)$ son linealmente dependientes y, por consiguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m-1 & -1 \\ m & -2 & 2m-2 \end{vmatrix}=0 \qquad \Longrightarrow \qquad m=-2,\ m=2$$

Ejercicio 3. *Sean los puntos* $A(\lambda, 2, \lambda)$*,* $B(2, -\lambda, 0)$*,* $C(\lambda, 0, \lambda + 2)$*. ¿Existe algún valor de* λ *para el que los puntos* A*,* B *y* C *estén alineados?*

Solución:

Si los puntos están alineados, los vectores $\overrightarrow{AB} = (2 - \lambda, -\lambda - 2, -\lambda)$ y $\overrightarrow{AC} = (0, -2, 2)$ deberían tener la misma dirección y en consecuencia, sus coordenadas proporcionales:

$$\frac{0}{2-\lambda} = \frac{-2}{-\lambda - 2} = \frac{2}{-\lambda}$$

Este sistema de ecuaciones no tiene solución. En consecuencia los puntos no pueden estar alineados.

Ejercicio 4. *Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos* $A(1, -2, 1)$*,* $B(3, 2, 2)$ *y es perpendicular al plano de ecuación* $x - y + 1 = 0$*.*

Solución:

Los vectores directores del plano buscado son $\overrightarrow{AB} = (2, 4, 1)$ y $(1, -1, 0)$ que es el vector normal del plano dado. El plano que buscamos es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y+2 & 4 & -1 \\ z-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicio 5. *Halla el plano que contiene la recta*

$$s\colon\ -x = y - 2 = 1 - z$$

y el punto $A(3, 1, 6)$*.*

Solución:

La recta, escrita en forma continua, es:

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

un punto de la recta es $P(0, 2, 1)$ y el vector director $\vec{u} = (-1, 1, -1)$. Los vectores directores del plano son $\vec{u}$ y $\overrightarrow{AP} = (-3, 1, -5)$. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -3 \\ y-2 & 1 & 1 \\ z-1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicio 6. *Calcular el plano* π *perpendicular a la recta*

$$x - 1 = y - 2 = \frac{z}{6}$$

y que pasa por el punto $(0, 0, 1)$*.*

Solución:

El vector normal al plano es $\vec{n} = (1,1,6)$ (vector director de la recta). La ecuación del plano es:

$$1(x-0)+1(y-0)+6(z-1)=0 \quad\Longrightarrow\quad x+y+6z-6=0$$

Ejercicio 7. *Sean las rectas:*

$$r:\ \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{2} \qquad s:\begin{cases} x-3y-5=0\\ x-3z-8=0\end{cases}$$

Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

Solución:

Los vectores directores de r y s son vectores directores del plano. El vector director de la recta s es:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -3 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix} = (9,3,3)$$

La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 9\\ y-1 & -1 & 3\\ z-2 & 2 & 3\end{vmatrix} = 0$$

Ejercicio 8. *Dado el plano $\pi:\ x+3y+z=4$, calcular el punto simétrico P del punto $O(0,0,0)$ respecto del plano π.*

Solución:

Calculamos la recta perpendicular a π por el punto $O(0,0,0)$:

$$\begin{cases} x=t\\ y=3t\\ z=t\end{cases}$$

Calculamos el punto Q, intersección de la recta y el plano:

$$\begin{cases} x=t\\ y=3t\\ z=t\\ x+3y+z=4\end{cases} \quad\Longrightarrow\quad t+9t+t=4 \quad\Longrightarrow\quad t=\frac{4}{11}$$

Así que el punto de intersección es $Q\left(\frac{4}{11},\frac{12}{11},\frac{4}{11}\right)$.

Puesto que Q es punto medio entre O y su simétrico $P(x',y',z')$:

$$\begin{aligned} \frac{4}{11}&=\frac{0+x'}{2} &&\Longrightarrow\quad x'=\frac{8}{11}\\ \frac{12}{11}&=\frac{0+y'}{2} &&\Longrightarrow\quad y'=\frac{24}{11}\\ \frac{4}{11}&=\frac{0+z'}{2} &&\Longrightarrow\quad z'=\frac{8}{11}\end{aligned}$$

El punto simétrico es $P\left(\frac{8}{11},\frac{24}{11},\frac{8}{11}\right)$.

Ejercicio 9. *Dadas las rectas:*

$$r\colon\begin{cases}x-kz=2\\ y-z=-3\end{cases}\quad;\qquad s\colon\frac{x-1}{2}=y+1=z$$

¿Existe algún valor de k que haga que estas rectas sean secantes?

Solución:

La ecuación de la recta r en forma paramétrica es:

$$\begin{cases}x=2+k\lambda\\ y=-3+\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$$

Un punto de esta recta es $P(2,-3,0)$ y un vector director $\vec{u}=(k,1,1)$. Para la segunda recta, el punto es $Q(1,-1,0)$ y el vector director $\vec{v}=(2,1,1)$. Como en el problema anterior, para que las rectas se corten, el siguiente determinante debe ser cero:

$$\begin{vmatrix}k&2&-1\\1&1&2\\1&1&0\end{vmatrix}=0\quad\Longrightarrow\quad k=2$$

Sin embargo, para este valor de k las rectas son paralelas. No existe ningún k que haga que las rectas se corten.

Ejercicio 10. *Calcular la ecuación de la perpendicular común a las rectas:*

$$r_1:\ \frac{x}{-3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{2}\ ;\qquad r_2:\ \frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+3}{-1}$$

Solución:

El vector director de la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-3&1&2\\2&-1&-1\end{vmatrix}=(1,1,1)$$

El plano que contiene a r_1 y a la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix}x&-3&1\\y-2&1&1\\z-2&2&1\end{vmatrix}=0\quad\Longrightarrow\quad -x+5(y-2)-4(z-2)=0\quad\Longrightarrow\quad -x+5y-4z-2=0$$

El plano que contiene a r_2 y a la perpendicular común es:

$$\begin{vmatrix}x+1&2&1\\y&-1&1\\z+3&-1&1\end{vmatrix}=0\quad\Longrightarrow\quad -3y+3(z+3)=0\quad\Longrightarrow\quad -y+z+3=0$$

La ecuación como intersección de planos de la perpendicular común es:

$$\begin{cases}-x+5y-4z-2=0\\ -y+z+3=0\end{cases}$$

---

19. Examen de Geometría 2ºF

Ejercicio 1.

- *Determinar la posición relativa de las rectas:*

$$r: \ \frac{x+4}{-3}=\frac{y-7}{4}=\frac{z}{1} \qquad s: \ \begin{cases} x+2y-5z-5=0 \\ 2x+y+2z-4=0 \end{cases}$$

- *Hallar los puntos de la recta:*

$$r: \ \frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+1}{-1}$$

cuya distancia al plano $\pi: \ 2x-y+2z+1=0$ *es igual a* 1.

Solución:

- Para la primera recta un vector director es $\vec{u}=(-3,4,1)$ y un punto $P(-4,7,0)$.

  El vector director de la segunda recta es:

$$\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=(9,-12,-3)$$

  Se ve claramente que las rectas son paralelas puesto que las coordenadas de los vectores directores son proporcionales. Las rectas no son coincidentes porque el punto P no pertenece a s.

- Los planos paralelos que están a distancia 1 del plano dado tienen como ecuación $2x-y+2z+D=0$ y cumplen:

$$1=\frac{|D-1|}{\sqrt{4+1+4}} \quad\Longrightarrow\quad |D-1|=3 \quad\Longrightarrow\quad D=4, \ D=-2$$

  Los planos son $2x-y+2z+4=0$ y $2x-y+2z-2=0$.

  Calculamos los puntos de intersección de la recta dada con estos planos:

$$\begin{cases} 2x-y+2z+4=0 \\ x=3+\lambda \\ y=5+\lambda \\ z=-1-\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-y+2z-2=0 \\ x=3+\lambda \\ y=5+\lambda \\ z=-1-\lambda \end{cases}$$

  y obtenemos los puntos $P(6,8,-4)$ y $Q\,(2,0,4)$.

Ejercicio 2. *Un plano corta a los ejes de coordenadas en los puntos* $A(1,0,0)$, $B(0,\lambda,0)$, $C(0,0,4)$. *se pide:*

- *Hallar el valor de* $\lambda>0$ *de manera que el volumen del tetraedro* $OABC$ *(donde* O *es el origen) sea* 2.

- *Para el valor de* λ *obtenido en el apartado anterior, calcular la longitud de la altura del tetraedro* $OABC$ *correspondiente al vértice* O.

Solución:

- Puesto que el volumen del tetraedro es 2:

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \lambda & 0\\0 & 0 & 4\end{vmatrix}=\pm 2 \quad\Longrightarrow\quad 4\lambda=\pm 12 \quad\Longrightarrow\quad \lambda=\pm 3$$

Puesto que nos piden la solución positiva, ésta es $\lambda = 3$.

- La ecuación del plano ABC es:

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1 \quad\Longrightarrow\quad 12x+4y+3z-12=0$$

La distancia desde $O(0,0,0)$ a este plano es la altura que nos piden:

$$h=\left|\frac{12\cdot 0+4\cdot 0+3\cdot 0-12}{\sqrt{144+16+9}}\right|=\frac{12}{13}$$

Ejercicio 3. *Dadas las rectas:*

$$r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{1}\,; \qquad s\equiv\frac{x+2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$$

se pide:

- *Determinar la distancia entre las rectas r y s.*
- *Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por $O(0,0,0)$ corta a la recta s.*

Solución:

- Calculamos el plano que contiene a r y es paralelo a s:

$$\begin{vmatrix}x-1 & 2 & 2\\y-2 & 3 & 1\\z & 1 & 1\end{vmatrix}=0 \quad\Longrightarrow\quad x-2z-1=0$$

y ahora la distancia desde el punto $P(-2,0,2)$ de la recta s a ese plano:

$$d=\left|\frac{-2-2\cdot 2-1}{\sqrt{1+4}}\right|=\frac{7}{\sqrt{5}}$$

- Tenemos la paralela a r por el origen:

$$\begin{cases}x=2\lambda\\y=3\lambda\\z=\lambda\end{cases}$$

y tenemos que calcular su posición relativa con:

$$\begin{cases}x=-2+2\lambda\\y=\lambda\\z=2+\lambda\end{cases}$$

Calculamos el determinante cuyas columnas son los vectores directores y el vector que une un punto de cada recta:

$$\begin{vmatrix}2 & 2 & -2\\3 & 1 & 0\\1 & 1 & 2\end{vmatrix}\neq 0$$

Las rectas se cruzan.

Ejercicio 4. *Dadas las rectas:*

$$r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}\ ; \qquad s \equiv \begin{cases} y+z=3 \\ 2x-y=2 \end{cases}$$

se pide:

- ◇ *Hallar la ecuación del plano π determinado por r y s.*
- ◇ *Hallar la distancia desde el punto $A(0,1,-1)$ a la recta s.*

Solución:

- ◇ Un vector director de la segunda recta es $(1,2,-2)$.

  Puesto que nos piden el plano que determinan suponemos que las rectas se cortan. La ecuación del plano que las contiene es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-1 & 2 & 2 \\ z+1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

- ◇ El plano perpendicular a s por A es:

$$1(x-0)+2(y-1)-2(z+1)=0 \quad\Longrightarrow\quad x+2y-2z-4=0$$

  La intersección del plano y la recta es:

$$\begin{cases} x+2y-2z-4=0 \\ y+z=3 \\ 2x-y=2 \end{cases}$$

  que tiene como solución $P(2,2,1)$.

  La distancia que nos piden es el módulo del vector $\overrightarrow{AP}=(2,1,2)$:

$$d=\sqrt{4+1+4}=3$$

Ejercicio 5.

- ◇ *Dados los puntos $P(2,1,-1)$, $Q(1,0,2)$ y la recta:*

$$r \equiv \begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=3 \end{cases}$$

  determinar los puntos de r que equidistan de P y Q.

- ◇ *Determinar la ecuación del plano π que pasa por el punto Q y es perpendicular a r.*

Solución:

- ◇ Calculamos el plano mediador de los dos puntos:

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=(x-1)^2+y^2+(z-2)^2$$

  Simplificando:

$$-2x-2y+6z+1=0$$

Calculamos el punto de corte de este plano y la recta es:

$$\begin{cases} -2x - 2y + 6z + 1 = 0 \\ x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

que da como solución el punto $P\left(15, -\frac{11}{2}, 3\right)$.

- El plano es:

$$2(x-1) - 1(y-0) + 0(z-2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x - y + 2 = 0$$

20. Examen de Geometría 2ºH

Ejercicio 1. *Dadas las rectas:*

$$r \equiv \begin{cases} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

se pide:

- ⋄ *Discutir la posición relativa de las dos rectas según los valores del parámetro a.*
- ⋄ *Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las rectas r y s.*

Solución:

- ⋄ Tomando como parámetro $y = t$, la recta r se escribe:

$$\begin{cases} x = 2 + at \\ y = t \\ z = 1 - at \end{cases}$$

y la recta s tomando como parámetro $z = t$:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$$

Un punto de la primera recta es $P(2, 0, 1)$ y de la segunda $Q(1, 3, 0)$. Entonces $\overrightarrow{PQ} = (-1, 3, -1)$. Los vectores directores son $\vec{u} = (a, 1, -a)$ y $\vec{v} = (1, -1, 1)$. Para que las rectas sean coplanarias los vectores directores y $\overrightarrow{PQ}$ deben ser dependientes y por tanto:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -a & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

que tiene como solución $a = 0$. Entonces tenemos que si $a = 0$ las rectas como son coplanarias y no son paralelas, se cortan. Para $a \neq 0$ las rectas se cruzan.

- ⋄ Calculamos el producto mixto de los tres vectores:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

y el producto vectorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, -2)$$

La distancia es:

$$d(r, s) = \left| \frac{[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}]}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \right| = \frac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$$

Ejercicio 2. *Dado el punto $P(1,3,-1)$, se pide:*

- *Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ cuya distancia a P sea igual a 3.*
- *Calcular los puntos de la recta:*

$$\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1-4\lambda \end{cases}$$

cuya distancia a P sea igual a 3.

Solución:

- La superficie esférica de centro $P(1,3,-1)$ y radio 3 es:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 3^2$$

- Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9 \\ x = 3\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1-4\lambda \end{cases}$$

y obtenemos:

$$(3\lambda-1)^2 + (1+\lambda-3)^2 + (1-4\lambda+1)^2 = 9$$
$$(3\lambda-1)^2 + (\lambda-2)^2 + (2-4\lambda)^2 = 9$$
$$26\lambda^2 - 26\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 0,\ \lambda = 1$$

Los puntos son $A(0,1,1)$ y $B(3,2,-3)$.

Ejercicio 3. *Dados el punto $A(1,-2,-3)$, la recta*

$$r : \begin{cases} x+y+1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

y el plano $\pi :\ x-2y-3z+1 = 0$, se pide:

- *Ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.*
- *Ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a π.*

Solución:

- Las ecuaciones paramétricas de la recta r son:

$$\begin{cases} x = -1-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Si el plano es paralelo a r tiene un vector director $\vec{u} = (1,1,0)$ (el vector director de r) y, si es perpendicular a π, otro vector director es $\vec{v} = (1,-2,-3)$ (el vector normal de π). La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y+2 & 1 & -2 \\ z+3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -x+y-z = 0$$

- Calculamos el plano paralelo a π que pasa por A:

$$1(x-1)-2(y+2)-3(z+3)=0 \quad\Longrightarrow\quad x-2y-3z-14=0$$

y el plano que contiene a r y A. Si $P(-1,0,0)$ es un punto de r, los vectores directores del plano son el vector director de la recta $\vec{u}=(-1,1,0)$ y $\overrightarrow{AP}=(-2,2,3)$. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & -1 & -2 \\ y & 1 & 2 \\ z & 0 & 3 \end{vmatrix}=0 \quad\Longrightarrow\quad 3(x+1)+3y=0 \quad\Longrightarrow\quad x+y+1=0$$

La recta que buscamos es la intersección de los dos planos:

$$\begin{cases} x-2y-3z-14=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$$

Hay que tener en cuenta que si esta recta fuese paralela a r (no lo es), el problema no tendría solución.

Otra manera de resolver el problema es calcular el plano paralelo a π por A, calcular el punto P de intersección de r con este plano y (si existe) la recta buscada es la recta AP.

Ejercicio 4. *Dados el plano:*

$$\pi_1 \equiv x+y+z=1$$

y la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-4}$$

se pide:

- *Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1.*
- *Hallar un plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1 y π_2 tenga una longitud de $\sqrt{29}$ unidades.*

Solución:

- El punto es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x=1+2t \\ y=-1+3t \\ z=-4t \end{cases}$$

que da el punto $P(3,2,-4)$.

- Calculamos la ecuación de la superficie esférica de centro P y radio $\sqrt{29}$:

$$(x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=29$$

y la intersección de r con esta superficie:

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=29 \\ x=1+2t \\ y=-1+3t \\ z=-4t \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&(1+2t-3)^2+(-1+3t-2)^2+(-4t+4)^2=29\\
&(2t-2)^2+(3t-3)^2+(-4t+4)^2=29\\
&29t^2-58t=0 \quad\Longrightarrow\quad t=0,\ t=2
\end{aligned}$$

Los puntos son $A(1,-1,0)$ y $B(5,5,-8)$.

Finalmente, calculamos los planos paralelos a π por estos puntos:

$$\begin{aligned}
(x-1)+(y+1)+z=0 &\quad\Longrightarrow\quad x+y+z=0\\
(x-5)+(y-5)+(z+8)=0 &\quad\Longrightarrow\quad x+y+z-2=0
\end{aligned}$$

Ejercicio 5. *Dada la recta:*

$$r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$$

y el plano $\pi: x+y-2z+1=0$, hallar la ecuación de la recta s simétrica de la recta r respecto del plano π.

Solución:

Calculamos el punto de corte de la recta y el plano:

$$\begin{cases}x+y-2z+1=0\\x=1+t\\y=-t\\z=t\end{cases}$$

que da como solución el punto $P(2,-1,1)$.

Ahora calculamos el simétrico de un punto de la recta, por ejemplo $A(1,0,0)$ respecto al plano. La perpendicular al plan por A es:

$$\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=-2t\end{cases}$$

La intersección de esta recta y el plano (el pie de la perpendicular) es la solución del sistema:

$$\begin{cases}x+y-2z+1=0\\x=1+t\\y=t\\z=-2t\end{cases}$$

que da el punto $Q\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. Este es el punto medio entre A y su simétrico $A'(x',y',z')$:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}=\frac{1+x'}{2} &\quad\Longrightarrow\quad x'=\frac{1}{3}\\
-\frac{1}{3}=\frac{y'}{2} &\quad\Longrightarrow\quad y'=-\frac{2}{3}\\
\frac{2}{3}=\frac{z'}{2} &\quad\Longrightarrow\quad z'=\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Finalmente calculamos la ecuación de la recta $A'P$. El vector director es $\overrightarrow{A'P}=\left(-\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ o también $(-5,1,1)$. La recta simétrica es:

$$\frac{x-2}{-5}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1}$$

21. Examen mayo 2013

Ejercicio 1. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

(a) *Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.*

(b) *Hallar los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$.*

(c) *Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$.*

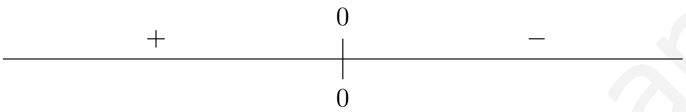
(d) *Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $y = x+2$, $x = 1$.*

Solución:

(a) Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

El signo de la derivada esta dado por:



La función es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente es $(0, \infty)$. Hay un máximo relativo en $(0, 2)$.

(b) Calculamos la segunda derivada:

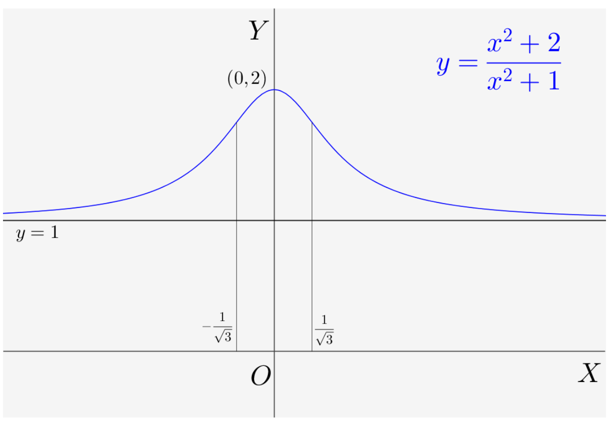
$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)2x(-2x)}{(x^2+1)^4} = \frac{-2(x^2+1) + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

Hay puntos de inflexión en $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ y en $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

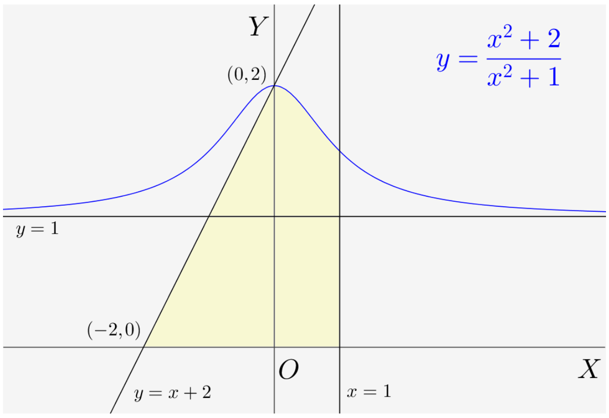
(c) No hay asíntotas verticales puesto que el denominador no tiene ceros. La asíntota horizontal es $y = 1$ puesto que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^+2}{x^2+1} = 1$$

La gráfica de la función es:



(d) El recinto está representado en la siguiente figura:



El área es la suma del área de un triángulo (de base y altura iguales a 2) y el área bajo la curva $y = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ entre 0 y 1:

$$S = 2 + \int_0^1 \frac{x^2+2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2 + \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x = 2 + \Big[x + \operatorname{artg} x\Big]_0^1 = 2 + \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = 3 + \frac{\pi}{4}$$

Ejercicio 2. *Dada la función:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+3x}{x-1} & x < 0 \\ a & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$$

se pide:

(a) *Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$.*

(b) *Para ese valor de a estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$.*

(c) *Hallar si las tiene las asíntotas de la gráfica de $f(x)$.*

Solución:

(a) Para que sea continua, los límites laterales en $x = 0$ deben ser iguales, e iguales al valor de la función a:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2+3x}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

Por consiguiente, la función será continua si $a = 0$.

(b) La derivada para los valores de x distintos de cero es:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-4x-3}{(x-1)^2} & x < 0 \\ \frac{1}{x^2}\,e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$$

Para que la funció sea derivable, deben coincidir las derivadas por la izquierda y por la derecha:

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2-4x-3}{(x-1)^2} = -3$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}}$$

Este segundo límite puede calcularse con el cambio $\frac{1}{x} = t$ de forma que cuando $x \to 0^+$, $t \to \infty$:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0$$

Por tanto, la función no es derivable.

(c) Hay una asíntota oblicua $y = 2x+5$ cuando $x \to -\infty$ (la asíntota de la función racional) y una asíntota horizontal $y = 1$ cuando $x \to +\infty$ (la asíntota de la función exponencial). La recta $x = 0$ que sería asíntota de la función racional no es asíntota de $f(x)$ puesto que para $x = 1$ la función se define mediante la exponencial.

Ejercicio 3. *Dado el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} 3x + 2y + (a-1)z &= 1 \\ -x + ay + z &= 0 \\ 2x + y - 2z &= 3 \end{cases}$$

se pide:

(a) *Discutir las soluciones según los valores de* a.

(b) *Hallar la solución del sistema para* $a = 1$

Solución:

(a) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & a-1 \\ -1 & a & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6a - a + 1 + 4 - 2a(a-1) - 3 - 4 = -2a^2 + 5a + 2$$

Este determinante se anula para $a = -2$ y $a = -\frac{1}{2}$. Pueden darse los siguientes casos:

(I) $a \neq -2$. $a \neq -\frac{1}{2}$. El rango de la matriz de coeficientes es 3. El rango de la matriz ampliada será también 3 y el sistema es compatible determinado.

(II) $a = -\frac{1}{2}$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 3$$

y, puesto que el rango de la matriz de coeficientes es 2, el sistema es incompatible.

(III) $a = -2$. Calculamos el rango de la matriz ampliada:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 3$$

El sistema es también incompatible.

(b) Para $a = 1$ tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ -x + y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

Es un sistema compatible determinado. Resolviendo por cualquier método se obtiene la solución:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = 1 \\ z = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Ejercicio 4. *Se consideran la recta y los planos siguientes:*

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases} \quad ; \quad \pi_1 \equiv 2 - 3x + 2y - z = 0\ ; \quad \pi_2 \equiv 3 + 2x + 2y - 2z = 0$$

Se pide:

(a) *Determinar la posición relativa de la recta respecto a cada uno de los planos.*

(b) *Determinar la posición relativa de los planos.*

(c) *Calcular la distancia de r a π_2.*

Solución:

(a) El vector director de la recta r es $\vec{u} = (-3, 2, -1)$ y los vectores normales a los planos π_1 y π_2 son $\vec{n_1} = (-3, 2, 1)$ y $\vec{n_2} = (2, 2, -2)$. Entonces:

(I) El vector director de la recta r tiene la misma dirección que el vector normal al plano π_1. La recta, corta perpendicularmente al plano.

(II) Calculamos el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{n_2}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{n_2} = -3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-2) = -6 + 4 + 2 = 0$$

Los dos vectores son perpendiculares. Esto quiere decir que, o bien la recta está contenida en el plano, o bien es paralela. Para distinguir entre los dos casos, tomamos un punto de la recta, por ejemplo $P(2, 1, 4)$ y comprobamos que no está contenido en el plano:

$$2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 3 \neq 0$$

Entonces, la recta y el plano son paralelos.

También podíamos haber resuelto el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano. Veríamos que en el primer caso el sistema es compatible determinado y el plano y la recta se cortan en un punto, y en el segundo es incompatible y, en consecuencia, son paralelos.

(b) Es evidente que los planos no son paralelos y, por consiguiente, se cortan.

(c) Basta calcular la distancia desde un punto cualquiera de la recta (por ejemplo $P(2, 1, 4)$) al plano:

$$d = \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 3|}{\sqrt{4 + 4 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

---

22. Examen septiembre 2013

1. (*a*) *Demostrar que la ecuación* $4x^5 + 3x + m = 0$ *solo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número* m. *Justifica la respuesta indicando qué teoremas se usan.*

   (*b*) *Calcular razonadamente las siguientes integrales definidas:*

$$\int_0^{\pi} e^{2x} \cos x \, \mathrm{d}x \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos^2 2x} \, \mathrm{d}x$$

Solución:

(*a*) Sea la función $f(x) = 4x^5 + 3x + m$ continua y derivable para todo valor de x. El problema es equivalente a demostrar que $f(x)$ solamente tiene un cero.

De acuerdo con el teorema de Rolle, entre cada dos ceros de una función continua y derivable debe haber al menos un cero de la derivada. Pero la derivada de f:

$$f'(x) = 20x^4 + 3$$

no se anula para ningún valor. Por consiguiente, $f(x)$ tiene a lo sumo un cero.

Demostremos que efectivamente se anula:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Longrightarrow f(x) \text{ toma valores negativos}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Longrightarrow f(x) \text{ toma valores positivos}$$

Puesto que la función toma valores positivos y negativos, de acuerdo con el teorema de Bolzano debe existir al menos un punto en el que toma el valor cero.

(*b*) La primera integral:

$$\int e^{2x} \cos x \, \mathrm{d}x$$

la calculamos por partes:

$$u = e^{2x} \qquad \mathrm{d}u = 2e^{2x} \, \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \cos x \, \mathrm{d}x \qquad v = \operatorname{sen} x$$

Entonces:

$$\int e^{2x} \cos x \, \mathrm{d}x = e^{2x} \operatorname{sen} x - 2 \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$$

Integrando de nuevo por partes:

$$u = e^{2x} \qquad \mathrm{d}u = 2e^{2x} \, \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}v = \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x \qquad v = -\cos x$$

$$\begin{aligned}
\int e^{2x} \cos x \, \mathrm{d}x &= e^{2x} \operatorname{sen} x - 2 \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x \\
&= e^{2x} \operatorname{sen} x - 2 \left(-e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x \, \mathrm{d}x \right) \\
&= e^{2x} \operatorname{sen} x + 2e^{2x} \cos x - 4 \int e^{2x} \cos x \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

y despejando:

$$\int e^{2x} \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{5} \left(e^{2x} \operatorname{sen} x + 2e^{2x} \cos x \right) + C$$

La integral definida es igual a:

$$\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}\left(e^{2x}\operatorname{sen} x + 2e^{2x}\cos x\right)\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{5}\left(1+e^{2\pi}\right)$$

Para resolver la segunda integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 2x}\,\mathrm{d}x$$

hacemos el cambio de variable:

$$\begin{aligned} t &= \cos 2x \\ \mathrm{d}t &= -2\operatorname{sen} 2x\,\mathrm{d}x \\ \operatorname{sen} 2x\,\mathrm{d}x &= -\frac{\mathrm{d}t}{2} \end{aligned}$$

y además:

$$\begin{aligned} x = \frac{\pi}{2} \quad &\Longrightarrow \quad t = -1 \\ x = 0 \quad &\Longrightarrow \quad t = 1 \end{aligned}$$

de forma que la integral queda:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_1^{-1}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{artg} t\Big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4}$$

---

2. *Dado el sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{cases} 3x + ay + 4z = 6 \\ x + (a+1)y + z = 3 \\ (a-1)x - ay - 3z = -3 \end{cases}$$

se pide:

(*a*) *Discutir el sistema según los valores de a.*

(*b*) *Resolverlo para $a = -1$.*

Solución:

(*a*) Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 3 & a & 4 \\ 1 & a+1 & 1 \\ a-1 & -a & -3 \end{vmatrix} = -9(a+1)+a(a-1)-4a-4(a-1)(a+1)+3a+3a = -3a^2-8a-5$$

El determinante se anula para $a=-1$ y $a=-\frac{5}{3}$. Pueden darse los siguientes casos:

(I) $a \neq -1,\ a \neq \frac{5}{3}$ El rango de la matriz de coeficientes es 3. El rango de la matriz ampliada será también 3 y el sistema es compatible determinado.

(II) $a = -\frac{5}{3}$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\operatorname{rango}\begin{bmatrix} 3 & -\frac{5}{3} & 4 & 6 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 1 & 3 \\ -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} & -3 & -3 \end{bmatrix} = \operatorname{rango}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -\frac{8}{3} & -3 & -3 \end{bmatrix} = \operatorname{rango}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -8 & -9 & -9 \end{bmatrix}$$

(o simplificando la última columna)

$$= \operatorname{rango}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -8 & -9 & -3 \end{bmatrix} = \operatorname{rango}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -8 & -1 & 5 \end{bmatrix} = 3$$

y, puesto que el rango de la matriz de coeficientes es 2, el sistema es incompatible.

(III) $a = -1$. Calculamos el rango de la matriz ampliada:

$$\text{rango}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

(Hemos quitado la primera columna pues sabemos que es dependiente, hemos simplificado la última y, finalmente hemos puesto ceros en la segunda fila). Como el rango de la matriz de coeficientes es también 2, el sistema es compatible indeterminado.

(b) Para $a = -1$ el sistema tiene la forma:

$$\begin{cases} 3x - y + 4z = 6 \\ x + z = 3 \\ -2x + y - 3z = -3 \end{cases}$$

Sabemos que este sistema es compatible indeterminado y que hay dos ecuaciones independientes. Nos quedamos con las dos primeras:

$$\begin{cases} 3x - y + 4z = 6 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

Tomando $z = \lambda$ como parámetro obtenemos la solución:

$$\begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

---

3. *Sea el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$:*

(a) *Hallar el punto simétrico de $(0,0,0)$ respecto de π.*

(b) *Hallar el plano perpendicular a π que contiene al eje OZ.*

(c) *Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes coordenados.*

Solución:

(a) Calculamos la perpendicular por $O(0,0,0)$ al plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$$

y la intersección de la perpendicular y el plano:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$$

y se obtiene el punto $Q\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right)$.

Éste es punto medio entre O y su simétrico $O'(x', y', z')$. Entonces:

$$\frac{3}{7} = \frac{0 + x'}{2} \quad \Longrightarrow \quad x' = \frac{6}{7}$$

De forma similar se obtienen y' y z'. El punto simétrico es $O'\left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{18}{7}\right)$.

(b) Si contiene al eje OZ, pasa por el origen y un vector director es $(0,0,1)$. Si es perpendicular a π, otro vector director es $(1,2,3)$. El plano es:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 0 & 2 \\ z & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

(c) Los puntos de intersección del plano π con los ejes de coordenadas son $A(6,0,0)$, $B(0,3,0)$ y $C(0,0,2)$. Las aristas del tetraedro con origen en O son:

$$\overrightarrow{OA} = (6,0,0) \ ; \qquad \overrightarrow{OB} = (0,3,0) \ ; \qquad \overrightarrow{OC} = (0,0,2)$$

El volumen del tetraedro es:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

---

4. *Dadas las rectas:*

$$r: \ \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{1} \qquad s: \ \begin{cases} x+2y-5z-5=0 \\ 2x+y+2z-4=0 \end{cases}$$

(a) *Determinar su posición relativa.*

(b) *Calcular su distancia.*

Solución:

(a) Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica. La primera es:

$$r: \begin{cases} x = -4-3\lambda \\ y = 7+4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Para la segunda, tomando $z = \mu$ como parámetro, se obtiene:

$$s: \begin{cases} x = 1-3\mu \\ y = 2+4\mu \\ z = \mu \end{cases}$$

Resulta evidente que las rectas son paralelas.

(b) Para obtener su distancia necesitamos un punto de cada recta $P(-4,7,0)$ y $Q(1,2,0)$ y el vector director $\vec{u} = (-3,4,1)$:

$$\overrightarrow{PQ} = (5,-5,0) \ ; \qquad \vec{u} \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (5,5,-5)$$

La distancia entre las rectas es:

$$d = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{25+25+25}}{\sqrt{9+16+1}} = \sqrt{\frac{75}{26}}$$