1. Matrices y determinantes

Ejercicio 1. *Calcular el rango de la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\text{rango } A &= \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} && \text{poniendo ceros en la } 3^{\text{a}} \text{ columna} \\
&= \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} && \text{Puesto que } F_2 = F_3 \\
&= \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} && \text{Intercambiando } C_1 \text{ y } C_3 \\
&= \text{rango} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} && \text{restando } F_2 \text{ a } F_3 \\
&= \text{rango} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Ejercicio 2. *Resolver la ecuación*

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & x & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

Todas las filas y columnas suman lo mismo. Vamos a aprovechar esta circunstancia. Sumando a la primera columna las otras dos resulta:

$$\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 1 \\ x+3 & 2 & x \\ x+3 & x & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & x & 2 \end{vmatrix} = 0$$

restando la primera fila a las otras dos resulta:

$$(x+3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & x-1\\ 0 & x-1 & 1\end{vmatrix}=0 \quad\Longrightarrow\quad (x+3)(2x-x^2)=0 \quad\Longrightarrow\quad x=0,\ x=2,\ x=-3$$

Ejercicio 3. *Estudia el rango de la siguiente matriz según el valor del parámetro a:*

$$B=\begin{bmatrix}2 & -1 & a\\ a & 3 & 4\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

Solución:

Calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & a\\ a & 3 & 4\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=12-12-a^2-9a+8+2a=-a^2-7a+8$$

El determinante es cero para:

$$-a^2-7a+8=0 \quad\Longrightarrow\quad a^2+7a-8=0 \quad\Longrightarrow\quad a=-8,\ a=1$$

Entonces tenemos:

- ⋄ Para $a\neq -8$ y $a\neq 1$ rango $A=3$.
- ⋄ Si $a=-8$:

  $$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -8\\ -8 & 3 & 4\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

  El rango no puede ser 3 puesto que el determinante de la matriz es cero. El rango es entonces igual a 2 puesto que claramente hay dos filas linealmente independientes.
- ⋄ Si $a=1$ la matriz es:

  $$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 4\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

  y el rango es 2 por la misma razón que en el apartado anterior.

Ejercicio 4. *Averiguar para qué valores del parámetro k admite inversa la matriz A:*

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & k\end{bmatrix}$$

y halla la inversa de A para $k=1$.

Solución:

Para que la matriz tenga inversa, su determinante debe ser distinto de cero. El determinante es:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & k\end{vmatrix}=-4+6-2-4k=-4k$$

El determinante es cero para $k = 0$. Por consiguiente, existe la inversa de A siempre que $k \neq 0$.

Calculemos la matriz inversa para $k = 1$:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \Longrightarrow \quad |A| = 0 - 4 + 6 - 0 - 4 - 2 = -4$$

La matriz adjunta es:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Trasponemos:

$$\text{adj } A^t = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

y dividiendo por el determinante, obtenemos finalmente la inversa:

$$A^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5. *Resuelve la ecuación matricial* $B(2A + I) = AXA + B$*, siendo:*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

Para despejar la matriz X calculamos en primer lugar la inversa de A. Procediendo como en el problema anterior:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 4 + 2 - 8 = 1$$

La matriz adjunta es:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \text{adj } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

y

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} AXA + B = B(2A + I) \quad &\Longrightarrow \quad AXA = B(2A + I) - B \\ &\Longrightarrow \quad AXA = 2BA + B - B \\ &\Longrightarrow \quad AXA = 2BA \qquad \text{multiplicando a ambos lados por } A^{-1} \\ &\Longrightarrow \quad A^{-1}AXAA^{-1} = 2A^{-1}BAA^{-1} \\ &\Longrightarrow \quad X = 2A^{-1}B \end{aligned}$$

Por tanto

$$X = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 6 \\ -6 & -18 & 12 \\ 4 & 14 & -10 \end{bmatrix}$$

2. Sistemas de ecuaciones

Ejercicio 1. *Escribe el siguiente sistema en forma matricial y resuelve calculando la matriz inversa:*

$$\begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ 2x-y+z &= 3 \\ 3x+y-z &= 2 \end{aligned}$$

Solución:

En forma matricial el sistema se escribe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

De forma que, despejando la matriz de incógnitas:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa de la matriz de coeficientes A. Puede comprobarse que el determinante de A vale 10. Además

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \implies \operatorname{adj}^t A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, la solución es $x = 1, y = 2, z = 3$.

Ejercicio 2. *Resolver el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned} x-2y+\ \ z &= 1 \\ 2x+3y+\ \ z &= 4 \\ 4x-\ \ y+3z &= 7 \end{aligned}$$

Solución:

Estudiamos la compatibilidad del sistema calculando el rango de las matrices. Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{rango } A < 3$$

y puesto que hay menores de orden 2 en la matriz concluimos que rango $A = 2$

Calculemos ahora el rango de la matriz ampliada:

$$\begin{aligned}
\text{rango } A^* &= \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & 7 \end{bmatrix} && \text{suprimimos } C_2 \\
&= \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix} && \text{restamos } C_1 \text{ a } C_2 \text{ y } C_3 \\
&= \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= 3
\end{aligned}$$

El rango es 3 puesto que el determinante es claramente, distinto de cero. Los dos rangos son distintos luego el sistema es incompatible.

Ejercicio 3. *Discute y resuelve según los valores del parámetro m el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned}
mx + \quad y + (m+1)z &= 0 \\
my + (m-1)z &= 0 \\
x \qquad + \qquad 2z &= 1
\end{aligned}$$

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & m+1 \\ 0 & m & m-1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = m^2 - 1$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
m^2 - 1 \neq 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{rango } A = 3 \\
m^2 - 1 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{rango } A < 3
\end{aligned}$$

Como $m^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad m = -1, m = 1$, pueden darse los siguientes casos:

(i) $m \neq -1, m \neq 1 \quad \Longrightarrow \quad$ rango $A =$ rango $A^* = 3$. El sistema es compatible determinado.

(ii) $m = -1$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango} A^* = \text{rango} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 3$$

Y el sistema es incompatible puesto que rango$A = 2$.

(iii) $m = 1$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango} A^* = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

y de nuevo el sistema es incompatible.

Vamos a resolver el sistema para $m \neq -1, m \neq 1$. Por la regla de Cramer:

$$x = \frac{1}{m^2-1}\begin{vmatrix}0 & 1 & m+1\\ 0 & m & m-1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix} = \frac{-m^2-1}{m^2-1};$$

$$y = \frac{1}{m^2-1}\begin{vmatrix}m & 0 & m+1\\ 0 & 0 & m-1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix} = \frac{-m}{m+1};$$

$$z = \frac{1}{m^2-1}\begin{vmatrix}m & 1 & 0\\ 0 & m & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = \frac{m^2}{m^2-1};$$

Ejercicio 4. *Discute y resuelve según los valores del parámetro el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned} 2x - ay - z &= 0\\ (2-2a)x + 5y + z &= 0\\ 4x + y \quad &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

Se trata de un sistema homogéneo. Los rangos de las dos matrices son iguales y el sistema es siempre compatible. Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix}2 & -a & -1\\ 2-2a & 5 & 1\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix} = 16 - 2a$$

Entonces el determinante es cero para $a = 8$ y es distinto de cero para $a \neq 8$. Pueden presentarse entonces dos casos:

(i) $a \neq 8 \implies \operatorname{rango} A = \operatorname{rango} A^* = 3$. El sistema es compatible determinado y su única solución es la solución trivial $x = y = z = 0$.

(ii) $a = 8$. Calculamos el rango de la matriz:

$$\operatorname{rango}\begin{bmatrix}2 & -8 & -1\\ -14 & 5 & 1\\ 4 & 1 & 0\end{bmatrix} = 2$$

El sistema es compatible indeterminado. Solamente hay dos ecuaciones independientes, de modo que el sistema queda reducido a:

$$\begin{aligned} 2x - 8y - z &= 0\\ 4x + y \quad &= 0 \end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{aligned} 2x - 8y &= z\\ 4x + y &= 0 \end{aligned}$$

Y llamando $z = t$ se obtiene la solución por la regla de Cramer:

$$x = \frac{t}{34}; \quad y = \frac{-4t}{34}; \qquad z = t \qquad \text{o bien} \qquad x = t; \quad y = -4t; \quad z = 34t$$

---

3. Examen de matrices y sistemas

Ejercicio 1. *Estudia la compatibilidad del siguiente sistema:*

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= -1 \\ x - y - z &= -1 \\ 2x + y + 3z &= 5 \end{aligned}$$

Solución:

Calculamos el determinate de la matriz de coeficientes:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} & \text{sumando la primera columna a las otras dos} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el rango de la matriz de coeficientes (y de la matriz ampliada) es 3. El sistema es compatible determinado.

Ejercicio 2. *Discute la compatibilidad del siguiente sistema según los diversos valores de λ y resuélvelo para $\lambda = -1$:*

$$\begin{aligned} -x + \lambda y + 2z &= \lambda \\ 2x + \lambda y - z &= 2 \\ \lambda x - y + 2z &= \lambda \end{aligned}$$

Solución:

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 2 \end{vmatrix} & \text{sumando a la primera columna las otras dos:} \\ &= \begin{vmatrix} 1+\lambda & \lambda & 2 \\ 1+\lambda & \lambda & -1 \\ 1+\lambda & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (1+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1+\lambda & -1 & 2 \end{vmatrix} & \text{restando la segunda fila a la primera:} \\ &= (1+\lambda) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -3(1+\lambda)^2 \end{aligned}$$

Por tano, pueden presentarse los siguientes casos:

- ◇ $\lambda \neq -1$: rango $A =$ rango $A^* = 3$. El sistema es compatible determinado.

- ⋄ $\lambda=-1$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -1 & 2\\ -1 & -1 & 2 & -1\end{bmatrix}=2$$

El sistema es compatible indeterminado.

Resolvamos el sistema para $\lambda=-1$. Nos quedamos con las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{aligned}-x-y+2z&=-1\\ 2x-y-\ \ z&=2\end{aligned}$$

Tomando $z=t$ como parámetro:

$$\begin{aligned}-x-y&=-1-2t\\ 2x-y&=2+\quad t\end{aligned}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}x=1+t\\ y=t\\ z=t\end{cases}$$

Ejercicio 3. *Discutir en función del parámetro a el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned}x+y+\ \ z&=0\\ ax\quad+\ \ 2z&=0\\ 2x-y+az&=0\end{aligned}$$

Resolverlo para $a=1$.

Solución:

Se trata de un sistema homogéneo. El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & 0 & 2\\ 2 & -1 & a\end{vmatrix}=-a^2-a+6$$

El determinante se hace cero para:

$$a^2+a-6=0\quad\Longrightarrow\quad a=-3,\ a=2$$

Pueden darse los siguientes casos

- ⋄ $a\neq 2,\ a\neq -3$. El sistema es compatible determinado. la solución es la trivial $x=y=z=0$.
- ⋄ $a=2$. Sistema compatible indeterminado.
- ⋄ $a=-3$. Sistema compatible indeterminado.

Para $a=1$ el sistema es determinado de forma que su solución es $x=y=z=0$.

Ejercicio 4. *Dada la matriz:*

$$M=\begin{bmatrix}m & 1 & 2m\\ m & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

se pide:

- ⋄ *Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M es invertible.*
- ⋄ *Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M^{25} es invertible.*
- ⋄ *Para $m=-1$ calcular, si es posible, la matriz inversa de la matriz M.*

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz:

$$|M| = \begin{vmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{restando la segunda fila a la primera}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2m-2 \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= m(2m-2)$$

- ⋄ La matriz es invertible salvo para los valores de m que anulan el determinante, es decir, $m=0$ y $m=1$.
- ⋄ Para los mismos valores puesto que si $|M|=0$, entonces $|M^{25}|=|M|^{25}=0$ y si $|M|\neq 0$, entonces $|M^{25}|=|M|^{25}\neq 0$.
- ⋄ Sea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos el determinante y resulta que $|A|=4$. La matriz adjunta es:

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Trasponiendo y dividiendo por el determinante se obtiene la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5. *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ ; \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la ecuación matricial $AXB = A+B$. **Solución:**

La segunda recta puede escribirse en paramétricas como:

$$s\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda + 2 \end{cases}$$

Un punto de la recta r es $P(1,0,2)$ y un vector director es $\overrightarrow{u}=(1,0,1)$. Para la recta s, un punto es $Q(1,-1,1)$ y un vector director $\overrightarrow{v}=(0,1,1)$.

Es evidente que las rectas no son paralelas. Para determinar si se cortan o se cruzan calculamos el determinante que tiene como filas (o columnas) los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$. Si este determinante es cero las rectas se cortan y si es distinto de cero se cruzan:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

y las rectas se cortan.s **Solución:**

Multiplicamos por la izquierda por A^{-1} y por B^{-1} por la derecha para despejar X:

$$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}(A+B)B^{-1}$$

Operando resulta

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}(A+B)B^{-1} \\ &= (A^{-1}A + A^{-1}B)B^{-1} \\ &= (I + A^{-1}B)B^{-1} \\ &= IB^{-1} + A^{-1}BB^{-1} \\ &= B^{-1} + A^{-1} \end{aligned}$$

Puesto que:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \; ; \qquad B^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

resulta

$$X = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

---

4. Examen de Geometría

Ejercicio 1. *Calcular la ecuación continua de la recta:*

$$r:\begin{cases} x+y-2z=3\\ 3x-y+z=0\end{cases}$$

Solución:

El vector director de la recta es el producto vectorial de los dos vectores normales:

$$\overrightarrow{u}=(1,1,-2)\times(3,-1,1)=(-1,-7,-4)$$

Puede tomarse como vector director $\overrightarrow{v}=(1,7,4)$. Para calcular la ecuación de la recta debemos obtener un punto. Dando el valor $x=0$ resulta el sistema:

$$\begin{cases} y-2z=3\\ -y+z=0\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad y=-3, z=-3$$

Entonces, un punto e la recta es $P(0,-3,-3)$. Con el punto y el vector director podems escribir la ecuación continua de la recta:

$$\frac{x}{1}=\frac{y+3}{7}=\frac{z+3}{4}$$

Otro procedimiento es resolver el sistema formado por las ecuaciones implícitas de la recta. Tomando $x=\lambda$ como párametro, resulta:

$$\begin{cases} y-2z=3-\lambda\\ -y+z=-3\lambda\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad y=\frac{1}{-1}\begin{vmatrix}3-\lambda & -2\\ -3\lambda & 1\end{vmatrix}=7\lambda-3;\quad z=\frac{1}{-1}\begin{vmatrix}1 & 3-\lambda\\ -1 & -3\lambda\end{vmatrix}=4\lambda-3$$

así, las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\begin{cases} x=\lambda\\ y=7\lambda-3\\ z=4\lambda-3\end{cases}$$

y despejando λ en las tres ecuaciones e igualando resulta la ecuación continua.

Ejercicio 2. *Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos* $A(1,1,1)$*,* $B(3,-1,0)$ *y* $C(2,0,-1)$*.*

Solución:

Tomamos como vectores directores del plano $\overrightarrow{AB}=(2,-2,-1)$ y $\overrightarrow{AC}=(1,-1,-2)$. La ecuación en forma de determinante es:

$$\begin{vmatrix}x-1 & 2 & 1\\ y-1 & -2 & -1\\ z-1 & -1 & -2\end{vmatrix}=0$$

La ecuación del plano que pasa por los tres puntos puede también escribirse como:

$$\begin{vmatrix}x & y & z & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=0$$

Ejercicio 3. *Calcular el valor de m para que los puntos $A(0,1,2)$, $B(1,0,3)$, $C(1,m,1)$ y $D(m,-1,2m)$ pertenezcan a un mismo plano.*

Solución:

Si los puntos son coplanarios, los vectores $\overrightarrow{AB}=(1,-1,1)$, $\overrightarrow{AC}=(1,m-1,-1)$ y $\overrightarrow{AC}=(m,-2,2m-2)$ son linealmente dependientes y, por consiguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m-1 & -1 \\ m & -2 & 2m-2 \end{vmatrix}=0 \quad\Longrightarrow\quad m=-2,\ m=2$$

Ejercicio 4. *Considera las rectas:*

$$r\colon \begin{cases} x+y+z+3=0 \\ x-y-z-1=0 \end{cases} \quad ; \qquad s\colon \frac{x+1}{2}=y+1=\frac{z+d}{-2}$$

Halla el valor de d para que las rectas sean secantes.

Solución:

Calculamos un punto y un vector director de la recta r. Dando por ejemplo a z el valor cero resulta:

$$\begin{cases} x+y=-3 \\ x-y=1 \end{cases} \qquad\Longrightarrow\qquad x=-1,\ y=-2$$

Un punto de la recta r es $P(-1,-2,0)$. El vector director es el prducto vectorial:

$$\vec{u}=(1,1,1)\times(1,-1,-1)=(0,2,-2)$$

Para la recta s un punto es $Q(-1,-1,-d)$ y un vector director es $\vec{v}=(2,1,-2)$. Si las rectas se cortan, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente dependientes y se verifica que:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -d \end{vmatrix}=0 \quad\Longrightarrow\quad -2d+2=0 \quad\Longrightarrow\quad d=1$$

Ejercicio 5. *Halla el plano que contiene la recta*

$$s\colon\ -x=y-2=1-z$$

y el punto $A(3,1,6)$.

Solución:

Un punto de la recta es $P(0,2,1)$ y un vector director $\vec{u}=(-1,1,-1)$. (Atención, la recta NO está dada en forma continua puesto que los coeficientes de x y z no son iguales a 1). Tomando como punto del plano A y como vectores directores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{AP}$, la ecuación del plano en forma de determinante es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & -1 & -3 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-6 & -1 & -5 \end{vmatrix}=0$$

Ejercicio 6. *Calcular el plano π perpendicular a la recta*

$$x-1=y-2=\frac{z}{6}$$

y que pasa por el punto $(0,0,1)$.

Solución:

El vector director de la recta $\overrightarrow{u} = (1,1,6)$ es normal al plano que nos piden. La ecuación de este plano es:

$$1 \cdot (x-0) + 1 \cdot (y-0) + 6 \cdot (z-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x + y + 6z - 6 = 0$$

Ejercicio 7. *Calcular la ecuación del plano determinado por las rectas:*

$$r\colon x = \frac{y}{3} = \frac{3-z}{2}; \qquad s\colon \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda - 1 \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

Solución:

Hay que suponer que las rectas se cortan, pues, si se cruzan no determinan ningún plano. Tomamos como vectores directores del plano los de las rectas y como punto, uno de cualquiera de las dos rectas. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 3 & 1 \\ z-3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicio 8. *Calcular la ecuación de la recta perpendicular al plano* $\pi\colon 2x - 3y + 5z - 1 = 0$ *y que pasa por el punto* $A(2,2,3)$.

Solución:

El vector normal al plano es vector director de la recta que nos piden, de forma que la ecuación de ésta es:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{5}$$

Ejercicio 9. *Estudia la posición relativa de las rectas r y s siendo:*

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = 2\lambda + 2 \end{cases} ; \qquad s\colon \begin{cases} x = 1 \\ z = y + 2 \end{cases}$$

Solución:

La segunda recta puede escribirse en paramétricas como:

$$s\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda + 2 \end{cases}$$

Un punto de la recta r es $P(1,0,2)$ y un vector director es $\overrightarrow{u} = (1,0,1$. Para la recta s, un punto es $Q(1,-1,1)$ y un vector director $\overrightarrow{v} = (0,1,1)$.

Es evidente que las rectas no son paralelas. Para determinar si se cortan o se cruzan calculamos el determinante que tiene como filas (o columnas) los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$. Si este determinante es cero las rectas se cortan y si es distinto de cero se cruzan:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

y las rectas se cortan.

Ejercicio 10. *Dadas las rectas:*

$$r\colon \begin{cases} x - kz = 2 \\ y - z = -3 \end{cases} \quad ; \qquad s\colon \frac{x-1}{2} = y + 1 = z$$

¿Existe algún valor de k que haga que estas rectas sean secantes?

Solución:

Como en el caso anterior, la ecuación de la recta r en forma paramétrica es:

$$\begin{cases} x = 2 + k\lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto de esta recta es $P(2, -3, 0)$ y un vector director $\overrightarrow{u} = (k, 1, 1)$. Para la segunda recta, el punto es $Q(1, -1, 0)$ y el vector director $\overrightarrow{v} = (2, 1, 1)$. Como en el problema anterior, para que las rectas se corten, el siguiente determinante debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 2$$

Sin embargo, para este valor de k las rectas son paralelas. No existe ningún k que haga que las rectas se corten.

---

5. Segundo examen de geometría

Ejercicio 1. *Calcula la recta perpendicular al plano* $\pi\colon x-2y+z-4=0$ *que pasa por el punto* $P(-1,2,0)$.

Solución:

El vector normal al plano $\overrightarrow{n}=(1,-2,1)$ es vector directoe de la recta perpendicular. Entonces, la ecuación de la perpendicular es:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{1}$$

Ejercicio 2. *Calcula la ecuación en forma continua de la recta que pasa por* $A(1,-2,2)$ *y es paralela a*

$$r\colon \begin{cases} 2x-y+z=8 \\ x-y+2z=9 \end{cases}$$

Solución:

Dos vectores perpendiculares a la recta son $\overrightarrow{n_1}=(2,-1,1)$ y $\overrightarrow{n_2}=(1,-1,2)$. Un vector director de la recta puede obtenerse multiplicando vectorialmente estos dos vectores:

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(-1,-3,-1)$$

Tomando como vector director $(1,3,1)$, la ecuación de la prarlela es:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-2}{1}$$

Ejercicio 3. *Se considera la recta dada por:*

$$r\colon \begin{cases} x+y+z=2 \\ x+z=1 \end{cases}$$

y el plano de ecuación $\pi\colon x+y=3$. *Hallar el ángulo que forman la recta y el plano.*

Solución:

El vector director de la recta es:

$$\overrightarrow{u}=(1,1,1)\times(1,0,1)=(1,0,-1)$$

Como el vector normal al plano es $\overrightarrow{n}=(1,1,0)$, el ángulo entre recta y plano está dado por:

$$\operatorname{sen}\varphi=\frac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{n}|}=\frac{1\cdot 1+1\cdot 0+(-1)\cdot 0}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \varphi=\frac{\pi}{6}$$

Ejercicio 4. *Sean las rectas:*

$$r\colon x=y=z-1; \qquad s\colon \frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$$

estudia su posición relativa.

Solución:

La primera recta pasa por el punto $P_1(0,0,1)$ y tiene como vector director $\overrightarrow{u_1}=(1,1,1)$. La segunda contiene al punto $P_2(0,0,0)$ y tiene como vector director $\overrightarrow{u_2}=(2,1,-1)$. Está claro que las dos rectas no son paralelas. Puesto que el producto mixto:

$$\left[\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}\neq 0$$

las rectas se cruzan.

Ejercicio 5. *Hallar la proyección ortogonal de la recta*

$$r\colon \frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-1}$$

sobre el plano de ecuación $\pi\colon x+y-z=4$.

Solución:

La recta que nos piden es la intersección del plano π con el plano perpendicular a π que contiene a r. Este plano contiene al punto de la recta $P(1,-2,3)$ y tiene como vectores directores el de la recta $\overrightarrow{u}=(4,1,-1)$ y el normal al plano $\overrightarrow{v}=(1,1,-1)$. La ecuación de este plano es entonces:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 1 \\ y+2 & 1 & 1 \\ z-3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0 \quad\Longrightarrow\quad y+z-1=0$$

La proyección ortogonal es la recta:

$$\begin{cases} x+y-z=4 \\ y+z-1=0 \end{cases}$$

o en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x=5+2\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

Ejercicio 6. *Hallar la ecuación de la recta perpendicular a*

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y=3 \end{cases}$$

que pasa por el punto $A(1,0,1)$.

Solución:

Hallamos la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a la recta. El vector director de la recta es:

$$\overrightarrow{u}=(1,1,1)\times(2,1,0)=(-1,2,-1)$$

Este vector puede tomarse como vector normal al plano perpendicular. La ecuación de ese plano es:

$$-1(x-1)+2y-1(z-1)=0 \quad\Longrightarrow\quad x-2y+z=2$$

Calculamos el punto de corte de este plano con la recta, es decir, la solución del sistema:

$$\begin{cases} x-2y+z=2 \\ x+y+z=3 \\ 2x+y=3 \end{cases}$$

La solución de este sistema es el punto $Q\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$.

La recta que buscamos (la que pasa por A y corta a la recta dada perpendicularmente es la recta AQ que tiene ecuación:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$$

Ejercicio 7. *Calcula el valor de k para que la recta*

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+z=k \end{cases}$$

esté contenida en el plano $x+y-z-1=0$.

Solución:

La recta en forma paramétrica es:

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=k-\lambda \end{cases}$$

El vector director de esta recta es $\overrightarrow{u}=(1,-2,-1)$ y un punto de esta recta es $P(0,0,k)$. Para que la recta esté contenida en el plano el vector director de la recta debe ser perpendicular al vector normal plano $\overrightarrow{n}=(1,1,-1)$. Esto es así ya que:

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}=1\cdot 1+1\cdot(-2)+(-1)\cdot(-1)=0$$

Además la recta y el plano deben tener puntos comunes. El punto P debe estar en el plano y por tanto:

$$0-0-k-1=0 \quad\Longrightarrow\quad k=-1$$

Ejercicio 8. *Dadas las rectas:*

$$r\colon \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{1}; \qquad s\colon \frac{x+2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$$

1. *Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.*
2. *Determinar la distancia entre las rectas r y s.*

Solución:

La ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s contiene a los puntos de r y sus vectores directores son los de r y s. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y-2 & 3 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad\Longrightarrow\quad x-2z-1=0$$

La distancia entre las rectas es igual a la distancia desde cualquier punto de la recta s (por ejemplo $P(-2,0,2)$) al plano que acabamos de calcular:

$$d=\left|\frac{-2-2\cdot 2-1}{\sqrt{1+4}}\right|=\frac{7}{\sqrt{5}}$$

---

6. Límites y continuidad

Ejercicio 1. *Aplicar el teorema de Bolzano para:*

1. *Demostrar que las gráficas de las funciones* $y = \operatorname{sen} x$ *e* $y = \frac{1}{x}$ *se cortan en un punto.*
2. *Demostrar que la función* $f(x) = x^3 + x - 5$ *toma el valor* 20 *en el intervalo* $(1, 3)$.

Solución:

- ◇ Las gráficas se cortan si existe un x tal que $\operatorname{sen} x = \frac{1}{x}$, es decir, si la ecuación

$$\operatorname{sen} x - \frac{1}{x} = 0$$

tiene solución.

Sea la función $F(x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{x}$. Esta función es continua para todo $x \neq 0$. Además:

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} > 0$$
$$F(\pi) = \operatorname{sen}\pi - \frac{1}{\pi} < 0$$

Entonces, de acuerdo con el teorema de Bolzano existe un valor $c \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ tal que $F(c) = 0$. Entonces, en $x = c$ se cortan las dos gráficas.

- ◇ La función $f(x) = x^3 + x - 5$ es continua para todo valor de x. Además:

$$f(1) = -3$$
$$f(3) = 23$$

Segun el teorema de los valores intermedios, consecuencia del teorema de Bolzano, la función toma en el intervalo $(1, 3)$ todos los valores comprendidos entre -3 y 25. Entonces existe un punto $c \in (1, 3)$ en el que toma el valor 22.

Ejercicio 2. *Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+5x}{x+1} - \dfrac{3x}{2}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4+2x}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+4}{x+5}\right)^{2x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln x)^{1-3x}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+5x}{x+1} - \frac{3x}{2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2(x^2+5x) - 3x(x+1)}{2(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{2x} = -\infty$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x^4+2x}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-\sqrt{x^4+2x}\right)\left(x^2+\sqrt{x^4+2x}\right)}{\left(x^2+\sqrt{x^4+2x}\right)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^4-2x}{2x^2}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{2x^2}\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+5}\right)^{2x-1} &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{x+4}{x+5}-1\right)(2x-1)}\\
&= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{(x+4-x-5)(2x-1)}{x+5}}\\
&= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-2x}{x}}\\
&= e^{-2}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\ln x)^{1-3x} = \infty^{-\infty} = 0$$

Ejercicio 3. *Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$
4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-6x+9}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2} = 0$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0} e^{(1+\operatorname{sen} x-1)\frac{1}{x}}\\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}\\
&= e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+9} &= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)^2}\\
&= \lim_{x\to 3}\frac{x-4}{x-3}\\
&= \infty
\end{aligned}$$

Ejercicio 4. *Encontrar el dominio de la función:*

$$y = \sqrt{x^4 - 6x^2 - 8x - 3}$$

Solución:

Debe ser $x^4 - 6x^2 - 8x - 3 \geq 0$. Factorizamos el polinomio y resulta:

$$x^4 - 6x^2 - 8x - 3 = (x+1)^3(x-3)$$

y de aquí obtenemos que el polinomio es positivo para $x \in (-\infty, -1] \bigcup [3, \infty)$.

Ejercicio 5. *Demostrar que* $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ *y que* $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ *y a partir de estos límites demostrar equivalencias entre infinitésimos.*

Solución:

Ver apuntes.

---

7. Reglas de derivación

Calcular la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = 3x\sqrt{x}$
2. $y = \cos x \ln x$
3. $y = e^{2x} \ln x$
4. $y = \cos x \operatorname{artg} x$
5. $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \ln \sqrt{x}$
6. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
7. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$
8. $y = \dfrac{x^2-3x+1}{(2x-3)^3}$
9. $y = \dfrac{\operatorname{artg} x}{x^2}$
10. $y = \dfrac{e^{3x}}{(\ln x)^2}$
11. $y = 5\sqrt{\ln \cos 2x}$
12. $y = \dfrac{e^x}{x \operatorname{sen} x}$
13. $y = \left(\dfrac{3-x^2}{3+x^2}\right)^3$
14. $y = e^{\frac{1}{x^2}}$
15. $y = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
16. $y = 5x^3 \operatorname{tg}^2 x$
17. $y = xe^x - x$
18. $y = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2}$
19. $y = (3x^2-1)\ln(1-x)$
20. $y = (\arccos x)^2$

8. Recuperación continuidad. Derivadas

Ejercicio 1. *Dadas las funciones* $f(x) = x^3 + x^2$ *y* $g(x) = \cos \pi x - 2$ *demostrar que se cortan en algún punto del intervalo* $(-2, -1)$.

Solución:

El problema equivale a demostrar que la ecuación $x^3 + x^2 = \cos \pi x - 2$ tiene solución en el intervalo $(-2, -1)$ o que la función $F(x) = x^3 + x^2 - (\cos \pi x - 2)$ se hace cero en algún punto del intervalo. La función $F(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[-2, -1]$. Ademas en los extremos del intervalo:

$$F(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - \cos(-2\pi) + 2 = -8 + 4 - 1 + 2 = -3 < 0$$
$$F(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - \cos(-\pi) + 2 = -1 + 1 + 1 + 2 = 3 > 0$$

Puesto que la función es continua y toma valores de signo opuesto en los extremos del intervalo, de acuerdo con el teorema de Bolzano, existe un punto interior en que la función se hace cero. En ese punto las gráficas de las dos funciones se cortan.

Ejercicio 2. *Calcular los siguientes límites:*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 8x + 15}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x^2}}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^2 + 4}{2x^2 - 5}\right)^{-x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{7x^3 - 3}{4x^3}\right)^{-x}$

Solución:

- $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 8x + 15} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)(x-3)} = \lim_{x\to 5} \frac{x+5}{x-3} = 2$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\operatorname{sen} x \frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{x \frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$

  En este caso hay que distinguir:

  $$3x^3 - 11x^2 + 8x + 4 \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$
  $$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\infty} = \infty$$

- $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^2 + 4}{2x^2 - 5}\right)^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{\infty} = \infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{7x^3 - 3}{4x^3}\right)^{-x} = \left(\frac{7}{4}\right)^{\infty} = \infty$

Ejercicio 3. *Calcular los siguientes límites:*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{2 - \sqrt{4 - x}}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^3}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 3e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - 3}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x + 3} - x\right)$

Solución:

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{2-\sqrt{4-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(2+\sqrt{4-x})}{(2-\sqrt{4-x})(2+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x(2+\sqrt{4-x})}{4-4+x}=4$

- Aplicando la equivalencia $\ln(1+x^2)\sim x^2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}-3e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-3}=\frac{e^{-\infty}-3e^{\infty}}{e^{-\infty}-3}=\frac{0-\infty}{0-3}=\infty$

- Multiplicando y dividiendo por el conjugado:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-x\right)&=\lim x\to\infty\frac{(\sqrt{x^2-2x+3}-x)(\sqrt{x^2-2x+3}+x)}{\sqrt{x^2-2x+3}+x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3-x^2}{\sqrt{x^2-2x+3}+x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{2x}\\&=-1\end{aligned}$$

Ejercicio 4. *Calcular las asíntotas de las siguientes curvas:*

1. $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$
2. $y=\dfrac{1}{3x-2}$
3. $y=\dfrac{2x+1}{x^2-4}$
4. $y=\dfrac{x^3+1}{x^2-3x+2}$

Solución:

- Para la primera función:

$$x=3 \text{ es asíntota vertical puesto que } \lim_{x\to 3}\frac{2x+1}{x-3}=\infty$$
$$y=2 \text{ es asíntota horizontal puesto que } \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x-3}=2$$

- Razonando como en el caso anterior las asíntotas son $x=\frac{2}{3}$ e $y=0$.

- En este caso hay dos asíntotas verticales puesto que hay dos valores de x que anulan el denominador: $x=-2$ y $x=2$. La asíntota horizontal es $y=0$.

- Hay dos asíntotas verticales $x=1$ y $x=2$. No hay asíntota horizontal porque la función se hace infinita cuando x tiene a infinito. Calculemos la síntota oblicua:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^3-3x^2+2x}=1$$
$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^2-3x+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1-x^3+3x^2-2x}{x^2-3x+2}=3$$

de modo que la asíntota es $y=x+3$.

Ejercicio 5. *Derivar las siguientes funciones:*

1. $y = \cos x \ln x$
2. $y = \cos x \,\text{artg}\, x$
3. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
4. $y = \dfrac{x^2-3x+1}{(2x-3)^3}$
5. $y = \dfrac{e^{3x}}{(\ln x)^2}$
6. $y = \dfrac{e^x}{x \operatorname{sen} x}$
7. $y = e^{\frac{1}{x^2}}$
8. $y = 5x^3 \operatorname{tg}^2 x$
9. $y = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2}$
10. $y = (\text{arcos}\, x)^2$

Solución:

1. $y' = -\operatorname{sen} x \ln x + \dfrac{1}{x} \cos x$
2. $y' = -\operatorname{sen} x \,\text{artg}\, x + \dfrac{1}{1+x^2} \cos x$
3. $y' = \dfrac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$
4. $y' = \dfrac{(2x-3))(2x-3)^3 - 2(2x-3)^2 \cdot 2 \cdot (x^2-3x+1)}{(2x-3)^6}$
5. $y' = \dfrac{e^{3x} \cdot 3(\ln x)^2 - 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{3x}}{(\ln x)^4}$
6. $y' = \dfrac{e^x \cdot x \operatorname{sen} x - (1 \cdot \operatorname{sen} x + \cos x \cdot x)e^x}{(x \operatorname{sen} x)^2}$
7. $y' = e^{\frac{1}{x^2}} \left(\dfrac{-2}{x^3} \right)$
8. $y' = 15x^2 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot 5x^3$
9. $y' = \cos \dfrac{1}{x^2} \left(\dfrac{-2}{x^3} \right)$
10. $y' = 2\text{arcos}\, x \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Ejercicio 6. *Calcular el dominio de la función:*

$$3x^3 - 11x^2 + 8x + 4f(x) = \sqrt{3x^3 - 11x^2 + 8x + 4}$$

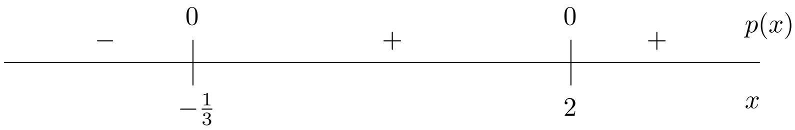
Solución:

El dominio es el conjunto de los números x que cumplen $3x^3 - 11x^2 + 8x + 4 \geq 0$. Para resolver esta inecuación factorizamos el polinomio y vemos el signo del polinomio para cada intervalo limitado por las raíces.

Factorizamos el polinomio (por ejemplo buscando raíces enteras mediante la regla de Ruffini) y resulta:

$$p(x) = 3x^3 - 11x^2 + 8x + 4 = (x-2)^2(3x+1)$$

Las raíces del polinomio son entonces, $x = 2$ y $x = -\frac{1}{3}$. El signo del polinomio para los distintos valores de x se representa en el siguiente esquema:



El polinomio es positivo o cero en el intervalo $\left[-\dfrac{1}{3}, \infty\right)$. Éste es el dominio de la función.

9. Derivadas. Representación de funciones

Ejercicio 1. *(1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva* $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x+3}$ *en el punto de abscisa* 3.

Solución:

La ordenada del punto es:

$$f(3) = \frac{9-6}{3+3} = \frac{1}{2}$$

Para calcular la pendiente de la recta tangente calculamos primero la derivada:

$$y' = \frac{(2x-2)(x+3) - 1 \cdot (x^2 - 2x}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x - 6}{(x+3)^2}$$

La pendiente de la tangente es el valor de la derivada para $x = 3$:

$$m = \frac{9 + 18 - 6}{36} = \frac{7}{12}$$

y la ecuación de la tangente es:

$$y - \frac{1}{2} = \frac{7}{12}(x-3)$$

Ejercicio 2. *(1 punto) Halla las tangentes a la curva* $y = \dfrac{2x}{x-1}$ *paralelas a la recta* $2x + y = 0$.

Solución:

La recta que nos dan tiene pendiente igual a -2. Vamos a hallar los puntos en que la curva tiene esa pendiente. Calculamos la derivada y la igualamos a -2:

$$y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = -2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Para $x = 0$, $y = 0$, y para $x = 2$, $y = 4$. Las ecuaciones de las dos tangentes, teniendo en cuenta que la pendiente es -2 son:

$$y = -2x; \qquad y - 4 = -2 \cdot (x-2)$$

Ejercicio 3. *(2 puntos) Calcula los siguientes límites:*

- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$
- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{e^x}}$
- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x^2}$
- $\diamond$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{x^2}$

Solución:

$\diamond$ Es un límite del tipo $\infty - \infty$. Escribimos como fracción y resulta un límite del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de l'Hopital y la equivalencia $\ln(1+x) \sim x$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)x+x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x)+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

- ◇ Aplicando la regla de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x\cos x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x^2 + (-\operatorname{sen} x^2)2x\cdot 2x} = 0$$

- ◇ El siguiente límite es del tipo ∞^0. Lo escribimos como una exponencial de base e:

$$\lim_{x\to +\infty}(\ln x)^{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\ln(\ln x)\frac{1}{e^x}} = e^0 = 1$$

- ◇ El cuarto límite es del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos la regla de l'Hopital y la equivalencia $\operatorname{sen} 3x \sim 3x$ y resulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 3x}3(-\operatorname{sen} 3x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-3\cdot 3x}{2x\cos 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{-9}{2\cos 3x} = \frac{-9}{2}$$

Ejercicio 4. *(1,5 puntos) Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$. Halla a y b para que la curva $y = f(x)$ tenga en $x = 1$ un punto de inflexión con tangente horizontal.*

Solución:

Si en $x = 1$ hay un punto de inflexión debe ser $f''(1) = 0$ y si la tangente es horizontal, $f'(1) = 0$. Las derivadas son:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 + 2ax + b\\
f''(x) &= 6x + 2a
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
f''(1) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad 6 + 2a = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = -3\\
f'(1) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad 3 - 6 + b = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = 3
\end{aligned}$$

Ejercicio 5. *(1,5 puntos) Halla los máximos y mínimos de la función $y = x^2\ln x$.*

Solución:

Calculamos las derivadas:

$$\begin{aligned}
y' &= 2x\ln x + \frac{1}{x}x^2 = 2x\ln x + x = x(1+2\ln x)\\
y'' &= 1\cdot(1+2\ln x) + \frac{2}{x}x = 3 + 2\ln x
\end{aligned}$$

Igualando a cero la primera derivada resulta

$$x(1+2\ln x)=0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x=0 \\ 1+2\ln x=0 \quad\Longrightarrow\quad \ln x=-\frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$$

La solución $x=0$ no es válida pues está fuera del dominio de la función. Calculamos la derivada segunda en $\frac{1}{\sqrt{e}}$:

$$y''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=3+2\ln\frac{1}{\sqrt{e}}=3+2(\ln 1-\ln\sqrt{e})=3+2(0-\frac{1}{2}\ln e)=2>0$$

Por consiguiente se trata de un mínimo. Calculemos la ordenada de este mínimo:

$$y\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\ln\frac{1}{\sqrt{e}}=\frac{1}{e}\cdot\frac{-1}{2}=\frac{-1}{2e}$$

Así pues, el mínimo está en el punto $m\left(\frac{1}{\sqrt{e}},\frac{-1}{2e}\right)$.

Ejercicio 6. *(1 punto) Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada cuya capacidad sea* 8 dm^3. *Averigua las dimensiones de la caja para que su superficie sea mínima.*

Solución:

Llamando x a la longitud de la arista de la base e y a la altura de la caja, la función que debe ser mínima es la superficie de la caja que es igual a la de sus dos bases $(2x^2)$ más la de las cuatro caras laterales $(4xy)$:

$$S=2x^2+4xy$$

Como el volumen debe ser 8 dm^3, se cumple que:

$$x^2y=8 \quad\Longrightarrow\quad y=\frac{8}{x^2}$$

de modo que:

$$S=2x^2+4x\frac{8}{x^2}=2x^2+\frac{32}{x}$$

Derivando e igualando a cero:

$$S'=4x-\frac{32}{x^2}=0 \quad\Longrightarrow\quad 4x^3-32=0 \quad\Longrightarrow\quad x=2$$

La altura y también vale 2 de modo que la caja de superficie mínima es un cubo de arista igual a 2.

Ejercicio 7. *(2 puntos) Sea la función:*

$$y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$$

- *Asíntotas*
- *Crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.*
- *Representación gráfica.*

Solución:

- La asíntota vertical es $x = 1$ puesto que
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+2}{x-1} = \infty$$
No hay asíntota horizontal ya que
$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-2x+2}{x-1} = \infty$$
Calculemos la asíntota oblicua:
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+2}{x(x-1)} = 1$$
$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-2x+2}{(x-1)} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+2-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x+2}{x-1} = -1$$
Así pues, la asíntota es $y = x - 1$.

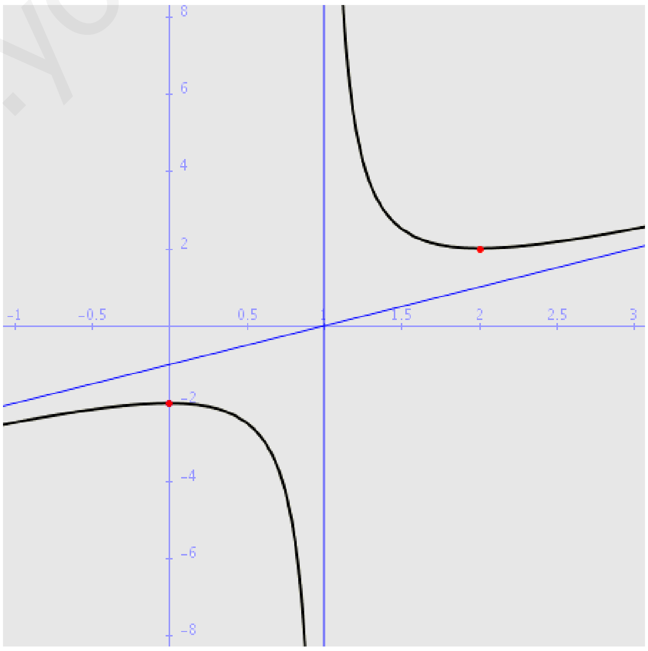
- Estudiemos el signo de la derivada:
$$y' = \frac{(2x-2)(x-1) - 1\cdot(x^2-2x+2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$
La derivada se anula para $x = 0$ y $x = 2$. El signo de la derivada viene representado en el siguiente esquema:

y'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
x		0		1		2	

$x \in (-\infty, 0)$	$y' > 0$	f creciente
$x = 0$	$y' = 0$	máximo
$x \in (0, 1)$	$y' < 0$	f decreciente
$x = 1$		no existe la función
$x \in (1, 2)$	$y' < 0$	f decreciente
$x = 2$	$y' = 0$	mínimo
$x \in (2, \infty)$	$y' > 0$	f creciente

El máximo está en el punto $M(0, -2)$ y el mínimo en $m(2, 2)$.

- Con estos datos, la gráfica de la función es la siguiente:



10. Segundo ejercicio de derivadas

Ejercicio 1. *Calcula la ecuación de la recta tangente a* $y = 3x^2 - 4x + 2$ *paralela a* $y = 2x - 5$.

Solución:

La pendiente de la recta tangente es la misma que la de la recta $y = 2x - 5$, es decir $m = 2$. Como la pendiente de la tangente es igual a la derivada, tenemos que:

$$y' = 6x - 4 = 2 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = 1$$

La ordenada del punto de tangencia es

$$y_0 = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 2 = 1$$

de modo que la ecuación de la tangente es:

$$y - 1 = 2 \cdot (x - 1)$$

Ejercicio 2. *Calcular los siguientes límites:*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{3x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

Solución:

◇ Aplicando la equivalencia $\operatorname{sen} x \sim x$ cuando $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^2}{3x^2} = \frac{4}{3}$$

◇ Aplicando la regla de l'Hopital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

Ejercicio 3. *Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva*

$$y = 4x^3 - 2x^2 - 10$$

en su punto de inflexión.

Solución:

En el punto de inflexión la segunda derivada es cero así que:

$$y' = 12x^2 - 4x$$

$$y'' = 24x - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{6}$$

La ordenada del punto de inflexión es:

$$y\left(\frac{1}{6}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 - 10 = -\frac{271}{27}$$

La pendiente de la tangente es la derivada para $x = \frac{1}{6}$:

$$y'\left(\frac{1}{6}\right) = 12 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

La ecuación de la tangente es:

$$y+\frac{271}{27}=-\frac{1}{3}\cdot\left(x-\frac{1}{6}\right)$$

Ejercicio 4. *Calcula las asíntotas y los extremos relativos de la función:*

$$y=\frac{e^x}{x-1}$$

Solución:

- ⋄ Las asíntotas son:

$$x=1 \text{ puesto que } \lim_{x\to 1}\frac{e^x}{x-1}=\infty$$
$$y=0 \text{ puesto que } \lim_{x\to -\infty}\frac{e^x}{x-1}=0$$

- ⋄ Para calcular los extremos relativos calculemos la derivada de la función:

$$y'=\frac{e^x(x-1)-1\cdot e^x}{(x-1)^2)}=\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Tanto el denominador (salvo en $x=1$) como el término e^x son positivos. El signo de la derivada depende entonces del factor $x-2$. Así, la derivada es menor que cero para $x<2$ y mayor que cero para $x>2$. En $x=2$ la derivada es cero y, puesto que la función es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha, presenta un mínimo en ese punto. La ordenada en $x=2$ es:

$$y(2)=\frac{e^2}{2-1}=e^2$$

Por consiguiente, el mínimo está en el punto $m\left(2,e^2\right)$.

Ejercicio 5. *Representa gráficamente la siguiente función estudiando su dominio, intersecciones con los ejes, asíntotas y monotonía:*

$$y=\frac{x^2}{x^2-4x+3}$$

Solución:

- ⋄ El dominio de la función está formado por todos los números reales salvo los que anulan el denominador (1 y 3).
- ⋄ Las intersecciones con los ejes son las soluciones de los sistemas:

$$\begin{cases} y=\frac{x^2}{x^2-4x+3} \\ x=0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y=\frac{x^2}{x^2-4x+3} \\ y=0 \end{cases}$$

El único punto de intersección de la curva con los ejes es el $(0,0)$.

- ⋄ Las asíntotas son:

$$x=1 \text{ es asíntota ya que } \lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x^2-4x+3}=\infty$$
$$x=3 \text{ es asíntota ya que } \lim_{x\to 3}\frac{x^2}{x^2-4x+3}=\infty$$
$$y=1 \text{ es asíntota ya que } \lim_{x\to \infty}\frac{x^2}{x^2-4x+3}=1$$

◇ Para analizar la monotonía analizamos el signo de la derivada:

$$y' = \frac{2x \cdot (x^2 - 4x + 3) - (2x - 4) \cdot x^2}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \frac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

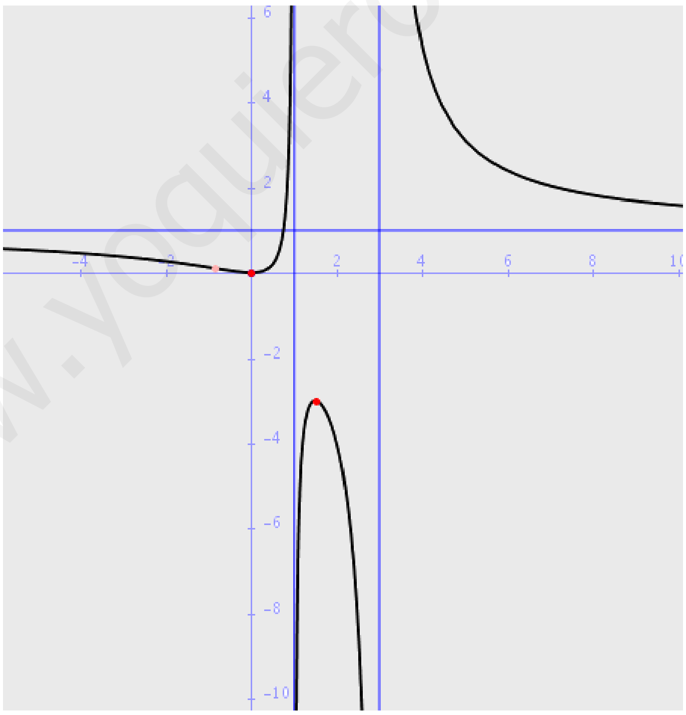
Las raíces del numerador son $x = 0$ y $x = \frac{3}{2}$. Las raíces del denominador son 1 y 3. Con estos datos tenemos el siguiente esquema de signos para la derivada:

$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	y'
	0		1		$\frac{3}{2}$		3		x

Es decir:

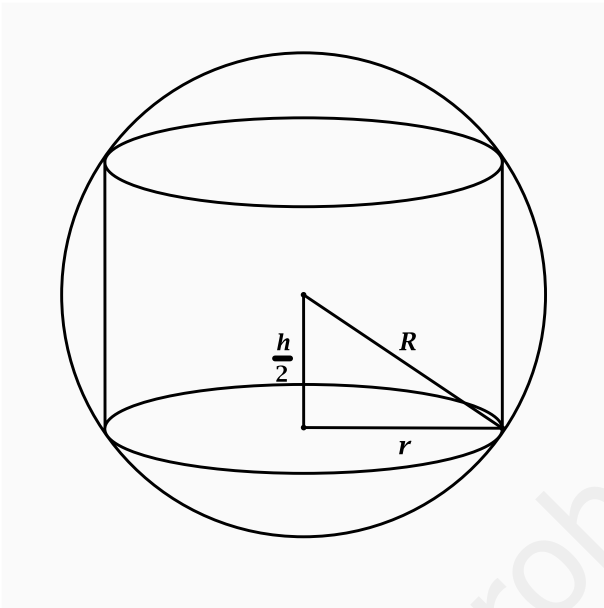
$x \in (-\infty, 0)$	$y' < 0$	f decreciente
$x = 0$	$y' = 0$	mínimo en $(0, 0)$
$x \in (0, 1)$	$y' > 0$	f creciente
$x = 1$		no existe la función
$x \in (1, \frac{3}{2})$	$y' > 0$	f creciente
$x = \frac{3}{2}$	$y' = 0$	máximo en $\left(\frac{3}{2}, -3\right)$
$x \in (\frac{3}{2}, 3)$	$y' < 0$	f decreciente
$x = 3$		no existe la función
$x \in (3, \infty)$	$y' < 0$	f decreciente

Con estos datos la siguiente gráfica:



Ejercicio 6. *Calcular la altura del cilindro de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio* 15 *cm.*

Solución:



El volumen del cilindro es:

$$V = \pi r^2 h$$

De la figura se deduce que:

$$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} = 225 - \frac{h^2}{4}$$

de forma que:

$$V = \pi\left(225 - \frac{h^2}{4}\right)h = 225\pi h - \frac{\pi h^3}{4}$$

Como esta función ha de ser máxima, su derivada ha de ser cero. Entonces:

$$V' = 225\pi - \frac{3\pi h^2}{4} = 0 \quad \Longrightarrow \quad h^2 = \frac{4 \cdot 225\pi}{3\pi} \quad \Longrightarrow \quad h = 10\sqrt{3}\ \text{cm}$$

Ejercicio 7. *La función $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un punto de tangente horizontal en $P(1,1)$. Sabiendo que este punto no es un extremo relativo calcular a, b y c.*

Solución:

Un punto de tangente horizontal que no es extremo debe ser un punto de inflexión. En este punto de abscisa $x = 1$, la ordenada debe ser 1, la primera derivada debe ser cero por ser un punto de tangente horizontal y la segunda derivada debe también ser cero por ser punto de inflexión. Las derivadas de la función son:

$$y' = 3x^2 + 2ax + b$$
$$y'' = 6x + 2a$$

Tenemos entonces las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} y(1) &= 1 + a + b + c = 1 \\ y'(1) &= 3 + 2a + b = 0 \\ y''(1) &= 6 + 2a = 0 \end{aligned}$$

sistema que tiene como soluciones $a = -3$, $b = 3$ y $c = 0$.

11. Integrales

Ejercicio 1. *Teorema fundamental del cálculo integral. Regla de Barrow.*

Ejercicio 2. *Calcular las siguientes integrales:*

$$\int \sqrt{3x}\, dx \qquad \int (e^x + 3e^{-x})\, dx$$

Solución:

- $\diamond$ $\displaystyle\int \sqrt{3x}\, dx = \int (3x)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{1}{3}\frac{(3x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2\sqrt{3x^3}}{3} + C$

- $\diamond$ $\displaystyle\int (e^x + 3e^{-x})\, dx = e^x - 3e^{-x} + C$

Ejercicio 3. *Calcular*

$$\int \frac{5}{4+9x^2}\, dx$$

Solución:

$$\int \frac{5}{4+9x^2}\, dx = 5\int \frac{1}{4+9x^2}\, dx = 5\int \frac{1}{2^2+(3x)^2}\, dx = 5\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{artg}\frac{3x}{2} + C = \frac{5}{6}\,\mathrm{artg}\frac{3x}{2} + C$$

Ejercicio 4. Calcular

$$\int \frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{x-2}\, dx$$

Solución:

Efectuando la división se obtiene de cociente $x^2 - x - 1$ y de resto -3. Entonces

$$\int \frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{x-2}\, dx = \int \left(x^2 - x - 1 - \frac{3}{x-2}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - 3\ln(x-2) + C$$

Ejercicio 5. Calcular

$$\int \mathrm{artg}\, x\, dx \qquad \int x\cos 3x\, dx$$

Solución:

Estas dos integrales se resuelven por partes:

- $\diamond$ En la primera, haciendo

$$\begin{cases} u = \mathrm{artg}\, x & du = \frac{1}{1+x^2}\, dx \\ dv = dx & v = x \end{cases}$$

resulta

$$\int \mathrm{artg}\, x\, dx = x\mathrm{artg}\, x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x\mathrm{artg}\, x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = x\mathrm{artg}\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

◇ En la segunda, haciendo

$$\begin{cases} u = x \quad du = dx \\ dv = \cos 3x\ dx \quad v = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x \end{cases}$$

obtenemos:

$$\int x\cos 3x\ dx = \frac{1}{3}x\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{3}\int \operatorname{sen} 3x\ dx = \frac{1}{3}x\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C$$

Ejercicio 6. *Calcular*

$$\int \sqrt{x^2-2x}(x-1)\ dx \qquad \int \frac{(1+\ln x)^2}{x}\ dx$$

Solución:

Estas dos integrales se resuelven por cambio de variable:

◇ Hacemos el cambio

$$t = x^2 - 2x, \qquad dt = (2x-2)\ dx, \qquad dx = \frac{dt}{2(x-1)}$$

y resulta

$$\int \sqrt{x^2-2x}(x-1)\ dx = \int \sqrt{t}(x-1)\frac{dt}{2(x-1)} = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\ dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-2x)^3} + C$$

◇ Para la segunda integral se hace el cambio:

$$t = 1 + \ln x, \qquad dt = \frac{1}{x}\ dx, \qquad dx = x\ dt$$

Entonces:

$$\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}\ dx = \int \frac{t^2}{x}\ x\ dt = \int t^2\ dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(1+\ln x)^3}{3} + C$$

Ejercicio 7. *Calcular el área comprendida entre la parábola $y = x^2 - 4x$ y la recta $y = 3x - 6$.*

Solución:

Calculamos los puntos de intersección de las dos curvas que serán los límites de la integral:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = 3x - 6 \end{cases} \implies x^2 - 4x = 3x - 6; \quad x^2 - 7x + 6 = 0 \implies x = 1;\ x = 6$$

Para calcular el área se calcula la integral de la diferencia de las dos funciones:

$$\int_1^6 (x^2 - 4x - 3x + 6)\ dx = \int_1^6 (x^2 - 7x + 6)\ dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x\right]_1^6 = -\frac{125}{6}$$

Por consiguiente, el área es $\frac{125}{6}$.

Ejercicio 8. *Se considera el recinto limitado por la parábola $y = x^2 + x - 2$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 4$. Representarlo gráficamente y calcular su área.*

Solución:

La parábola tiene como vértice el puntos

$$x_0 = \frac{-1}{2}; \qquad y_0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4}$$

y corta al eje X en los puntos

$$\begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = -2, \ x_2 = 1$$

La representación gráfica puede verse en la figura 1. Puesto que la curva corta al eje de abscisas, para

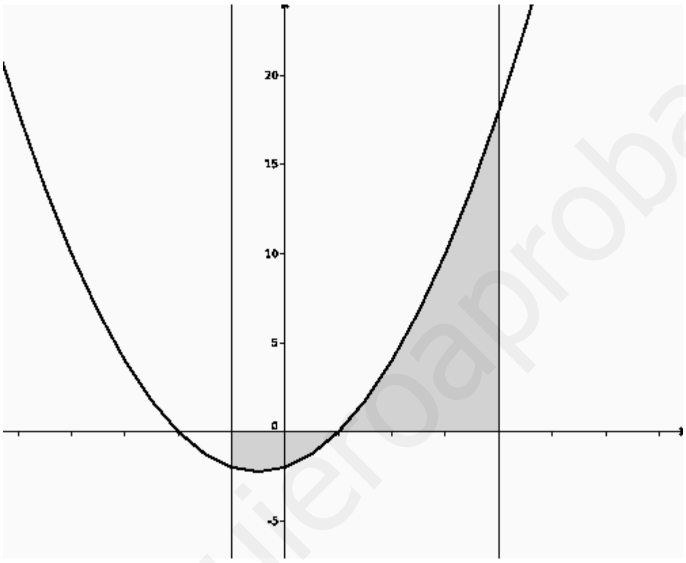


Figura 1: Ejercicio 8

calcular el área de la zona sombreada es preciso calcular dos integrales:

$$\int_{-1}^{1} (x^2 + x - 2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2\right) = -\frac{10}{3}$$

$$\int_{1}^{4} (x^2 + x - 2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{1}^{4} = \left(\frac{64}{3} + 8 - 8\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{45}{2}$$

de modo que el área total es:

$$S = \frac{10}{3} + \frac{45}{2} = \frac{155}{6}$$

12. Examen final

Ejercicio 1. *Averiguar para qué valores del parámetro k admite inversa la matriz A:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & k \end{bmatrix}$$

y halla la inversa de A para $k = 1$.

Solución:

Para que la matriz tenga inversa, su determinante debe ser distinto de cero. El determinante es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & k \end{vmatrix} = -4 + 6 - 2 - 4k = -4k$$

El determinante es cero para $k = 0$. Por consiguiente, existe la inversa de A siempre que $k \neq 0$.

Calculemos la matriz inversa para $k = 1$:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \Longrightarrow \quad |A| = 0 - 4 + 6 - 0 - 4 - 2 = -4$$

La matriz adjunta es:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Trasponemos:

$$\text{adj } A^t = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

y dividiendo por el determinante, obtenemos finalmente la inversa:

$$A^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2. *Resuelve la ecuación matricial $B(2A + I) = AXA + B$, siendo:*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

Para despejar la matriz X calculamos en primer lugar la inversa de A. Procediendo como en el problema anterior:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 4 + 2 - 8 = 1$$

La matriz adjunta es:

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \text{adj } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

y

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} AXA + B = B(2A+I) &\implies AXA = B(2A+I) - B \\ &\implies AXA = 2BA + B - B \\ &\implies AXA = 2BA \qquad \text{multiplicando a ambos lados por } A^{-1} \\ &\implies A^{-1}AXAA^{-1} = 2A^{-1}BAA^{-1} \\ &\implies X = 2A^{-1}B \end{aligned}$$

Por tanto

$$X = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 6 \\ -6 & -18 & 12 \\ 4 & 14 & -10 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3. *Discute y resuelve según los valores del parámetro el siguiente sistema:*

$$\begin{aligned} 2x - ay - z &= 0 \\ (2-2a)x + 5y + z &= 0 \\ 4x + y &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

Se trata de un sistema homogéneo. Los rangos de las dos matrices son iguales y el sistema es siempre compatible. Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & -a & -1 \\ 2-2a & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16 - 2a$$

Entonces el determinante es cero para $a = 8$ y es distinto de cero para $a \neq 8$. Pueden presentarse entonces dos casos:

(i) $a \neq 8 \implies \operatorname{rango} A = \operatorname{rango} A^* = 3$. El sistema es compatible determinado y su única solución es la solución trivial $x = y = z = 0$.

(ii) $a = 8$. Calculamos el rango de la matriz:

$$\operatorname{rango}\begin{bmatrix} 2 & -8 & -1 \\ -14 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

El sistema es compatible indeterminado. Solamente hay dos ecuaciones independientes, de modo que el sistema queda reducido a:

$$\begin{aligned} 2x - 8y - z &= 0 \\ 4x + y &= 0 \end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{aligned} 2x - 8y &= z \\ 4x + y &= 0 \end{aligned}$$

Y llamando $z = t$ se obtiene la solución por la regla de Cramer:

$$x = \frac{t}{34}; \quad y = \frac{-4t}{34}; \qquad z = t \qquad \text{o bien} \qquad x = t; \quad y = -4t; \quad z = 34t$$

Ejercicio 4. *Discute la compatibilidad del siguiente sistema según los diversos valores de λ y resuélvelo para $\lambda = -1$:*

$$\begin{aligned} -x + \lambda y + 2z &= \lambda \\ 2x + \lambda y - \ z &= 2 \\ \lambda x - \ y + 2z &= \lambda \end{aligned}$$

Solución:

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 2 \end{vmatrix} && \text{sumando a la primera columna las otras dos:} \\
&= \begin{vmatrix} 1+\lambda & \lambda & 2 \\ 1+\lambda & \lambda & -1 \\ 1+\lambda & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (1+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1+\lambda & -1 & 2 \end{vmatrix} && \text{restando la segunda fila a la primera:} \\
&= (1+\lambda) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -3(1+\lambda)^2
\end{aligned}$$

Por tano, pueden presentarse los siguientes casos:

- $\diamond$ $\lambda \neq -1$: rango A = rango $A^* = 3$. El sistema es compatible determinado.
- $\diamond$ $\lambda = -1$. El rango de la matriz ampliada es:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

El sistema es compatible indeterminado.

Resolvamos el sistema para $\lambda = -1$. Nos quedamos con las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{aligned} -x - y + 2z &= -1 \\ 2x - y - \ z &= 2 \end{aligned}$$

Tomando $z = t$ como parámetro:

$$\begin{aligned} -x - y &= -1 - 2t \\ 2x - y &= 2 + \ t \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Ejercicio 5. *Estudia la posición relativa de las rectas r y s siendo:*

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = 2\lambda + 2 \end{cases} \quad ; \quad s: \begin{cases} x = 1 \\ z = y + 2 \end{cases}$$

Solución:

La segunda recta puede escribirse en paramétricas como:

$$s\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda + 2 \end{cases}$$

Un punto de la recta r es $P(1,0,2)$ y un vector director es $\overrightarrow{u} = (1,0,1)$. Para la recta s, un punto es $Q(1,-1,1)$ y un vector director $\overrightarrow{v} = (0,1,1)$.

Es evidente que las rectas no son paralelas. Para determinar si se cortan o se cruzan calculamos el determinante que tiene como filas (o columnas) los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$. Si este determinante es cero las rectas se cortan y si es distinto de cero se cruzan:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

y las rectas se cortan.

Ejercicio 6. *Dadas las rectas:*

$$r\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}; \qquad s\colon \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$$

- ◇ *Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.*
- ◇ *Determinar la distancia entre las rectas r y s.*

Solución:

La ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s contiene a los puntos de r y sus vectores directores son los de r y s. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y-2 & 3 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x - 2z - 1 = 0$$

La distancia entre las rectas es igual a la distancia desde cualquier punto de la recta s (por ejemplo $P(-2,0,2)$) al plano que acabamos de calcular:

$$d = \left| \frac{-2 - 2\cdot 2 - 1}{\sqrt{1+4}} \right| = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

Ejercicio 7. *Halla las tangentes a la curva* $y = \dfrac{2x}{x-1}$ *paralelas a la recta* $2x + y = 0$.

Solución:

La recta que nos dan tiene pendiente igual a -2. Vamos a hallar los puntos en que la curva tiene esa pendiente. Calculamos la derivada y la igualamos a -2:

$$y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = -2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Para $x = 0$, $y = 0$, y para $x = 2$, $y = 4$. Las ecuaciones de las dos tangentes, teniendo en cuenta que la pendiente es -2 son:

$$y = -2x; \qquad y - 4 = -2\cdot(x-2)$$

Ejercicio 8. *Representa gráficamente la siguiente función estudiando su dominio, intersecciones con los ejes, asíntotas y monotonía:*

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$$

Solución:

- ◇ El dominio de la función está formado por todos los números reales salvo los que anulan el denominador (1 y 3).
- ◇ Las intersecciones con los ejes son las soluciones de los sistemas:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{x^2-4x+3} \\ x = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y = \frac{x^2}{x^2-4x+3} \\ y = 0 \end{cases}$$

  El único punto de intersección de la curva con los ejes es el $(0, 0)$.

- ◇ Las asíntotas son:

$$x = 1 \text{ es asíntota ya que } \lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \infty$$
$$x = 3 \text{ es asíntota ya que } \lim_{x \to 3} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = \infty$$
$$y = 1 \text{ es asíntota ya que } \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = 1$$

- ◇ Para analizar la monotonía analizamos el signo de la derivada:

$$y' = \frac{2x \cdot (x^2 - 4x + 3) - (2x - 4) \cdot x^2}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \frac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

  Las raíces del numerador son $x = 0$ y $x = \frac{3}{2}$. Las raíces del denominador son 1 y 3. Con estos datos tenemos el siguiente esquema de signos para la derivada:

$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	y'
	0		1		$\frac{3}{2}$		3		x

  Es decir:

$x \in (-\infty, 0)$	$y' < 0$	f decreciente
$x = 0$	$y' = 0$	mínimo en $(0, 0)$
$x \in (0, 1)$	$y' > 0$	f creciente
$x = 1$		no existe la función
$x \in (1, \frac{3}{2})$	$y' > 0$	f creciente
$x = \frac{3}{2}$	$y' = 0$	máximo en $\left(\frac{3}{2}, -3\right)$
$x \in (\frac{3}{2}, 3)$	$y' < 0$	f decreciente
$x = 3$		no existe la función
$x \in (3, \infty)$	$y' < 0$	f decreciente

Con estos datos puede dibujarse la gráfica que aparece en la figura 2.

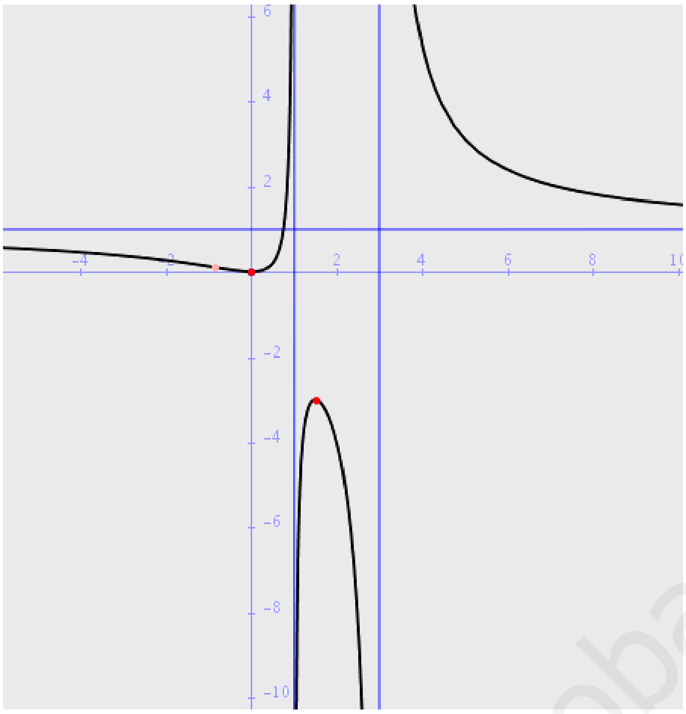


Figura 2: Ejercicio 8

Ejercicio 9. *Calcular las integrales*

$$\int x\ln x\;dx; \qquad \int \frac{x\;dx}{\sqrt{x^2+5}}$$

Solución:

La primera se integra por partes. Haciendo:

$$u = \ln x \qquad du = \tfrac{1}{x}\;dx$$

$$dv = x\;dx \qquad v = \tfrac{x^2}{2}$$

resulta:

$$\int x\ln x\;dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\;dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\;dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

Para calcular la segunda integral, hacemos el cambio de variable:

$$t = x^2+5; \qquad dt = 2x\;dx; \qquad dx = \frac{dt}{2x}$$

y obtenemos

$$\int \frac{x\;dx}{\sqrt{x^2+5}} = \int \frac{x}{\sqrt{t}}\,\frac{dt}{2x} = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2+5} + C$$

Ejercicio 10. *Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 2x^2 + x$ y la recta tangente a ella en el origen de coordenadas.*

Solución:

Calculamos la ecuación de la recta tangente. La derivada de la función es

$$y' = 3x^2 - 4x + 1$$

La pendiente de la recta tangente es la derivada en el punto de abscisa 0:

$$m = y'(0) = 1$$

La ecuación de la tangente es $y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$, es decir, $y = x$.

Ahora debemos calcular el área comprendida entre la curva y su tangente, es decir, entre $y = x^3 - 2x^2 + x$ y la recta $y = x$. Como en el ejercicio anterior, calculamos los puntos de intersección:

$$\begin{cases} y = x^3 - 2x^2 + x \\ y = x \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 2$$

Como las dos gráficas se cortan solamente en dos puntos, para calcular el área comprendida entre las dos, basta calcular la integral de la diferencia, o sea,

$$\int_0^2 (x^3 - 2x^2 + x - x)\, dx = \int_0^2 (x^3 - 2x^2)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{16}{3} = -\frac{4}{3}$$

y la superficie encerrada por la curva y la tangente es igual a $\frac{4}{3}$.