ÁLGEBRA DE MATRICES

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encuentra todas las matrices $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $AP = PA$.

Solución:
Se desea que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix}$$

Por tanto, debe cumplirse que:

$$\begin{cases} a+2c = a \\ b+2d = 2a+b \\ c = c \\ d = 2c+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = a \\ b = b \end{cases}$$

Luego, $P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, donde a y b son números reales cualesquiera.

2. a) Sean A, B y C tres matrices tales que el producto A · B · C es una matriz 3 × 2 y el producto A · C^t es una matriz cuadrada, siendo C^t la traspuesta de C. Calcula, razonando la respuesta, las dimensiones de A, B y C.

b) Dada $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, obtén todas las matrices X que conmutan con M, es decir, que verifican X · M = M · X.

c) Calcula la matriz Y que verifica M · Y + M^{-1} · Y = I, siendo M la matriz dada en b), M^{-1} la matriz inversa de M e I la matriz unidad de orden 2.

Solución:

a) Para multiplicar dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera coincida con el número de filas de la segunda. Es decir, pueden multiplicarse matrices de dimensiones m × n por n × p, siendo el resultado una matriz de dimensión m × p.

Por tanto, si el producto A · B · C es una matriz 3 × 2, la matriz A debe ser de dimensión 3 × n, la B de dimensión n × p, y la C de dimensión p × 2.

Para que pueda realizarse el producto A · C^t, matrices (3 × n) · (2 × p), es necesario que n = 2. Y si el resultado, que es de dimensión 3 × p, es una matriz cuadrada, entonces p = 3.

Por consiguiente: A es una matriz de dimensión 3 × 2; B, de dimensión 2 × 3; y C de dimensión 3 × 2.

b) Si $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ debe cumplirse que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a+b & -b \\ -c+d & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ a-c & b-d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a+b=-a \\ -b=-b \\ -c+d=a-c \\ -d=b-d \end{cases} \Rightarrow b=0;\ a=d;\ c=c.$$

La matriz $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$

c) $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, pues $M^{-1} = \dfrac{(M_{ij})^t}{|M|}$ (También puede obtenerse por el método de Gauss–Jordan.)

Como M · Y + M^{-1} · Y = I ⇒ (M + M^{-1}) · Y = I. Luego:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

3. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Comprobar que verifica $A^3 - I = O$, con I matriz identidad y O matriz nula.
b) Calcula A^{13}
c) Basándose en los apartados anteriores y sin recurrir al cálculo de inversas halla la matriz X que verifica la igualdad $A^2 X + I = A$.

Solución:
a) Multiplicando se tiene:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Por tanto, $A^3 - I = O$.

b) Como $A^3 = I \Rightarrow A^{12} = \left(A^3\right)^4 = I^4 = I$. Por tanto, $A^{13} = A^{12} \cdot A = I \cdot A = A$

c) De $A^2 X + I = A \Rightarrow A^2 X = A - I \Rightarrow A \cdot A^2 X = A \cdot (A - I) \Rightarrow$
$\Rightarrow A^3 X = A^2 - A \Rightarrow X = A^2 - A$

Luego,

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Resolver la ecuación matricial $B(2A+I)=AXA+B$, siendo

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix} \text{ e } I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Solución:
Operando en la ecuación dada se tiene:

$$B(2A+I)=AXA+B \;\Rightarrow\; 2BA+B=AXA+B \Rightarrow\; 2BA=AXA$$

Multiplicando por A^{-1} por ambos lados se tiene:

$$2BA=AXA \;\Rightarrow\; 2A^{-1}BAA^{-1}=A^{-1}AXAA^{-1} \;\Rightarrow\; 2A^{-1}B=X$$

Como $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ se tiene que

$$X=2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

<u>Nota</u>:
La inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ puede calcularse por el método de Gauss–Jordan. Así:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \to F1+F2\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)=(I|A^{-1})$$

La inversa es $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

a) Resolver el sistema $\begin{cases}2X-3Y=A\\ 3X+4Y=B\end{cases}$.

b) Calcular el rango de $M=A\cdot B$.

Solución:

a) Aplicando el método de reducción para la resolución de sistemas lineales:

$$\begin{cases}2X-3Y=A\\ 3X+4Y=B\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}\\ 2E2-3E1\end{matrix}\begin{cases}2X-3Y=A\\ 17Y=2B-3A\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17Y=2\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -2 & -1\\ -9 & -1 & 9\\ -2 & -7 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y=\frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix}7 & -2 & -1\\ -9 & -1 & 9\\ -2 & -7 & 2\end{pmatrix}.$$

Si se elimina la matriz Y se tiene:

$$\begin{cases}2X-3Y=A\\ 3X+4Y=B\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}\\ 3E2+4E1\end{matrix}\begin{cases}2X-3Y=A\\ 17X=3B+4A\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17X=4\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3 & 7\\ 12 & 7 & 5\\ 14 & -2 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=\frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3 & 7\\ 12 & 7 & 5\\ 14 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

b) $M=A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 4 & 0 & 5\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix}$.

Como la tercera fila es la suma de las dos primeras, el rango de $M=2$.

6. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}5&2&0\\2&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}a&b&0\\c&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

se pide:

a) Encontrar las condiciones que deben cumplir *a, b, c* para que se verifique *AB* = *BA*.

b) Para $a = b = c = 1$, calcular B^{10}.

Solución:

a) Multiplicando e igualando se obtiene:

$$AB=\begin{pmatrix}5&2&0\\2&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b&0\\c&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5a+2c&5b+2c&0\\2a+5c&2b+5c&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}a&b&0\\c&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&2&0\\2&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5a+2b&2a+5b&0\\7c&7c&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Debe cumplirse que: $\begin{cases}2a+5c=7c\\2b+5c=7c\end{cases}\Rightarrow a=b=c$

b) Para $a = b = c = 1$, $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Luego: $B^2=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$B^4=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&8&0\\8&8&0\\0&0&1\end{pmatrix};$$

$$B^8=\begin{pmatrix}8&8&0\\8&8&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8&8&0\\8&8&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}128&128&0\\128&128&0\\0&0&1\end{pmatrix};$$

$$B^{10}=B^8\cdot B^2=\begin{pmatrix}128&128&0\\128&128&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}512&512&0\\512&512&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

7. Sean A, I y B las matrices dadas por

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\ I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\ \text{y}\ B=\begin{pmatrix}6 & -3 & -4\\ -3 & 2 & 1\\ -4 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

Contestar razonadamente a la siguiente pregunta. ¿Existe algún valor de $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que la igualdad $(A-\lambda I)^2 = B$ sea cierta? En caso afirmativo hallar dicho valor de λ.

Solución:

Cálculo de $(A-\lambda I)^2$:

$$(A-\lambda I)^2=\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 0 & -\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 0 & -\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2+2 & 1-2\lambda & -2\lambda\\ 1-2\lambda & 1+(1-\lambda)^2 & 1\\ -2\lambda & 1 & 1+\lambda^2\end{pmatrix}$$

Para que $(A-\lambda I)^2 = B$ debe cumplirse que los elementos correspondientes de ambas matrices sean iguales. En particular que: $1 - 2\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = 2$. Este valor de λ cumple la igualdad de los demás elementos de ambas matrices. Por tanto, sí existe el valor de λ pedido en la cuestión.

8. a) Comprobar que si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 = 2A - I$, donde I es la matriz identidad, entonces A es invertible. ¿Cuál es la expresión de A^{-1}?
b) Utilizar el apartado a) para calcular la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:
a) Si $A^2 = 2A - I \Rightarrow I = 2A - A^2 \Rightarrow I = (2I - A) \cdot A$.
Por tanto, existe una matriz, $2I - A$, que multiplicada por A da la identidad. Esa matriz es la inversa de A: $A^{-1} = 2I - A$.

Para comprobar que A posee inversa hay que ver que su determinante es distinto de 0.
En efecto:

$$I = (2I - A) \cdot A \Rightarrow |I| = |(2I - A)| \cdot |A| \Rightarrow 1 = |(2I - A)| \cdot |A| \Rightarrow |A| \neq 0.$$

b) Si se quiere utilizar el apartado a) habrá que comprobar que $A^2 = 2A - I$.
Por una parte:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Por otra:

$$2A - I = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Efectivamente $A^2 = 2A - I$.

Por tanto, $A^{-1} = 2I - A$.

Luego,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

9. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Dar una definición de rango (o característica) de una matriz.
b) ¿Es cierto que rango(AB) = (rango A)(rango B)? Justificar la respuesta.

Solución:
a) El rango de una matriz es igual al número de vectores fila (o de vectores columna) linealmente independientes que tiene esa matriz. Ese número coincide con el orden del mayor menor no nulo de la matriz.

Para las matrices dadas:

rango de A = 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

rango de B = 2, pues el menor $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$.

b) El producto AB es:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, rango (AB) $\leq 3 \rightarrow$ (la matriz sólo tiene tres filas).

Como (rango A) · (rango B) = 2 · 2 = 4 y rango(AB) ≤ 3, la respuesta a la pregunta formulada es negativa.

10. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, encuentra dos matrices, B y C, de tamaño 3×2 y de rango 2, tales que el rango de AB sea 2 y el rango de AC sea 1.

Solución:

Hay infinidad de soluciones. Por ejemplo, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Como puede verse:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ que tiene rango 2.}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ que tiene rango 1.}$$

<u>Observación</u>:

De manera general, este ejercicio puede resolverse tomando $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$.

Multiplicando,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Para que el producto tenga rango 2 basta con que la fila (c, d) no sea proporcional a la fila (a, b). Por ejemplo, haciendo $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ y $d = 1$.

En cambio, para que el rango del producto sea 1 debe darse la proporcionalidad; o hacer que una de las filas sea (0, 0)

11. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$.

b) Comprueba que $(A+B)^2 = A^2 + B^2$

Solución:

a) Multiplicando:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Dado que $A \cdot B = -B \cdot A$ y que $(A+B)^2 = A^2 + A \cdot B + BA + B^2$ se cumple que $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

También puede verse haciendo las operaciones: sumando y multiplicando.

12. a) Despeja la matriz X en función de A e I_2 en la ecuación $(X+A)^2 = X^2 + X\cdot A + I_2$, siendo X y A matrices cuadradas de orden dos, e I_2 la matriz identidad de orden dos.

b) Resuelve la ecuación $B\cdot X + B^2 = I_2$, si $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e I_2 la matriz identidad de orden dos.

Solución:

a) Operando se tiene:

$$(X+A)^2 = X^2 + X\cdot A + I_2 \iff X^2 + A\cdot X + X\cdot A + A^2 = X^2 + X\cdot A + I_2 \iff$$
$$\iff A\cdot X + A^2 = I_2 \iff A\cdot X = I_2 - A^2 \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}(I_2 - A^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X = A^{-1} - A$$

b) De $B\cdot X + B^2 = I_2 \Rightarrow B\cdot X = I_2 - B^2 \Rightarrow B^{-1}\cdot B\cdot X = B^{-1}(I_2 - B^2) \Rightarrow X = B^{-1} - B$

La inversa de B es, $B^{-1} = \dfrac{(B_{ij})^t}{|B|}$, siendo (B_{ij}) la matriz de los adjuntos de B.

Como $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ y $(B_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

13. Sea A una matriz $m \times n$.
a) ¿Existe una matriz B tal que BA sea una matriz fila? Si existe, ¿qué orden tiene?
b) ¿Se puede encontrar una matriz B tal que AB es una matriz fila? Si existe, ¿qué orden tiene?

c) Busca una matriz B tal que $BA = (0 \quad 0)$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:
a) Inicialmente, la matriz B debe ser de dimensión $p \times m$. Así:

$$B_{p\times m} \cdot A_{m\times n} = (BA)_{p\times n}$$

Si se desea que $(BA)_{p\times n}$ sea una matriz fila, $p = 1$. Luego la matriz B debe ser de dimensión $1 \times m$.

b) En este caso, $A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = (AB)_{m\times p}$

Si se desea que $(AB)_{m\times p}$ sea una matriz fila, $m = 1$. Luego la matriz B debe ser de dimensión $n \times p$; siendo necesario que A sea una matriz fila, de dimensión $1 \times n$.

c) Si $BA = (0 \quad 0)$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, por el apartado a), la matriz B debe ser de dimensión 1×3; esto es, $B = (a \quad b \quad c)$.

Entonces: $(a \quad b \quad c)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0 \quad 0) \Rightarrow (a \quad 2a+b) = (0 \quad 0) \Rightarrow a = 0;\ b = 0.$

La matriz $B = (0 \quad 0 \quad c)$. En particular, $B = (0 \quad 0 \quad -5)$.

14. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A + I$, donde I es la matriz identidad. ¿Se pude asegurar que A admite inversa? Razonar la respuesta.

Solución:

De

$$A^2 = A + I \Rightarrow A^2 - A = I \Rightarrow A(A - I) = I$$

Luego, la matriz A admite inversa, y es: $A^{-1} = A - I$.

También puede verse que el determinante de A es distinto de cero, pues:

$$A(A - I) = I \Rightarrow |A(A-I)| = |I| \Rightarrow |A| \cdot |A - I| = 1$$

Si el producto anterior vale 1, ninguno de los dos factores es 0. Luego la matriz A es regular.

15. a) Determinar la matriz X para que tenga solución la ecuación C(A + X)B = I, donde A, B y C son matrices no singulares de orden n e I la matriz identidad de orden n.

b) Aplicar el resultado anterior para $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Nota: Matriz singular es aquella de determinante nulo.

Solución:

a) Como las matrices son no singulares, tienen inversa; entonces:

$$\mathrm{C(A + X)B = I} \Rightarrow \mathrm{C^{-1}C(A + X)BB^{-1} = C^{-1}IB^{-1}} \Rightarrow \mathrm{A + X = C^{-1}B^{-1}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{X = C^{-1}B^{-1} - A}$$

b) Las matrices dadas son invertibles: en todos los casos su determinantes es distinto de 0. Por tanto $\mathrm{X = C^{-1}B^{-1} - A}$.

Las inversas de B y C son: $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; luego:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

16. Dadas las matrices reales:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 9 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcular la matriz M = A − 2BC.

b) Justificar que existe la matriz D^{-1}, inversa de D, y calcular tal matriz.

c) Calcular las matrices X, Y que cumplen DX = M = YD.

Solución:

a) $M=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 9 & 4\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 9 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 4 & -6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 9 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & -6\\ 30 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 14\\ -21 & 4\end{pmatrix}.$

b) Como $|D|=-1$, la matriz D es no singular $\Rightarrow$ tiene inversa.

Matriz adjunta: $(D_{ij})=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -7 & 3\end{pmatrix}.$

Inversa:

$$D^{-1}=\frac{1}{|D|}(D_{ij})^{t}=-\begin{pmatrix}2 & -7\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 1 & -3\end{pmatrix}.$$

c) DX = M $\Rightarrow$ X = D^{-1}M $\Rightarrow$ $X=\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 14\\ -21 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-165 & 0\\ 72 & 2\end{pmatrix}.$

M = YD $\Rightarrow$ Y = MD^{-1} $\Rightarrow$ $Y=\begin{pmatrix}9 & 14\\ -21 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 21\\ 46 & -159\end{pmatrix}.$