

1 **Halla la expresión del haz de planos que pasa por la recta**
$$\begin{cases} x + 2y - z + 6 = 0 \\ -x + 3y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Solución:

$x + 2y - z + 6 + t(-x + 3y + 2z - 1) = 0$ con t un parámetro real.
 Habría que añadir, además, el plano $-x + 3y + 2z - 1 = 0$.

2 **Halla la expresión del haz de planos que pasa por la recta**
$$\begin{cases} 4x + y - 7z + 2 = 0 \\ -3x + 5z - 2 = 0 \end{cases}$$

Solución:

$4x + y - 7z + 2 + t(-3x + 5z - 2) = 0$ con t un parámetro real.
 Habría que añadir, además, el plano $-3x + 5z - 2 = 0$.

3 **Hallar el plano que contiene el eje OY y forma un ángulo de 30° con el eje OX.**

Solución:

El vector director del eje OX es $(1, 0, 0)$. Sea $u = (a, b, c)$ un vector unitario característico del plano buscado. Entonces

$(a, b, c) \cdot (1, 0, 0) = a = \cos 30^\circ = 1/2$, ya que el ángulo que forman un plano y una recta es el complementario del que forman el vector característico del plano y el director de la recta.

Además, contiene al eje OY, cuyo vector director es $(0, 1, 0)$, luego $(a, b, c) \cdot (1, 0, 0) = b = 0$.

Por lo tanto $u = (1/2, 0, c)$. Imponiendo que sea unitario

$$|u| = \sqrt{\frac{1}{4} + c^2} = 1 \Rightarrow c = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por contener al eje OY el plano pasa por $(0, 0, 0)$. Sus posibles vectores característicos son:

$$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ y } \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Por tanto, los planos buscados son:

$$x + \sqrt{3}z = 0 \quad \text{ó} \quad x - \sqrt{3}z = 0$$

4 **Sean los planos p y q , siendo: $p : ax + y - 2z + 1 = 0$; $q : 2x - y + 2z - 3 = 0$**
Determinar a para que:
a) los planos sean perpendiculares.
b) los planos determinen un ángulo de 60° .

Solución:

Los vectores normales a los planos son:

$$\vec{p} = (a, 1, -2) \quad \vec{q} = (2, -1, 2)$$

a) Si son perpendiculares, se cumple que su producto escalar es 0:

$$2a - 1 - 4 = 0; \quad a = 5/2$$

b) $\cos(\vec{p}, \vec{q}) = \cos 60^\circ = 1/2$

$$|\cos(\vec{p}, \vec{q})| = \frac{|2a - 5|}{\sqrt{a^2 + 5} \cdot \sqrt{9}} = \frac{1}{2} \quad 4(2a - 5)^2 = 9(a^2 + 5) \quad a_1 = \frac{80 + \sqrt{4860}}{14}; a_2 = \frac{80 - \sqrt{4860}}{14}$$

5

Calcula el punto P de la recta $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ de modo que el plano que contiene al eje OX y pasa por P forme un ángulo de 45° con el eje OZ.

Solución:

P es de la forma $P(0, 1, t)$.

El plano que contiene a OX y pasa por P es $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 0 & t \end{vmatrix} = -ty + z = 0$

$$\text{Como } \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{|(0, -t, 1) \cdot (0, 0, 1)|}{\sqrt{t^2 + 1} \cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow t^2 + 1 = 2$$

Entonces $t_1 = 1$ y $t_2 = -1$.

Soluciones: $P_1(0, 1, 1)$, $P_2(0, 1, -1)$

6 **Calcular la distancia entre las rectas:**

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{4} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -1 \\ z = 8 + 2t \end{cases}$$

Solución:

La recta r pasa por el punto $A (2, 2, -1)$ y es paralela al vector $u = (3, -1, 4)$, y la recta s pasa por el punto $B (5, -1, 8)$ y es paralela al vector $v = (1, 0, 2)$.

El volumen del paralelepípedo de la figura es igual al producto mixto de los vectores BA , u y v . Si este volumen lo dividimos por el área de la base, que es igual al módulo del producto vectorial de u y v , tendremos la altura del paralelepípedo, que es igual a la distancia entre r y s .

$$\text{dist}(r, s) = \frac{|[BA, u, v]|}{|u \times v|}$$

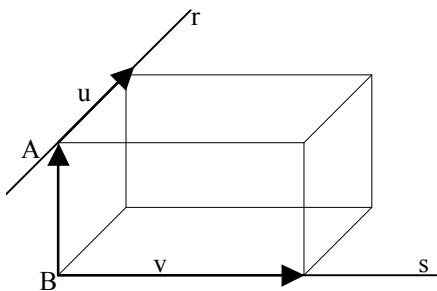
siendo el vector $BA = (-3, 3, -9)$

$$[BA, u, v] = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 9 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 9$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2i - 2j + k$$

de donde:

$$\text{dist}(r, s) = \frac{9}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 3$$



- 7 La recta r viene determinada por el punto $A (1, -3, 0)$ y el vector direccional $\vec{u} = (2, 4, 1)$ y la recta s por el punto $B (-1, 2, -4)$ y el vector direccional $\vec{v} = (-1, 3, 2)$.

1) Calcular el $|\det(\overline{AB}, \vec{u}, \vec{v})|$ e interpretar su significado.

2) Calcular $|\vec{u} \times \vec{v}|$ e interpretar su significado.

3)Cuál es el significado de $\frac{|\det(\overline{AB}, \vec{u}, \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$.

Solución:

1) Siendo

$$\overline{AB} = B - A = (-2, 5, -4)$$

$$|\overline{AB}, \vec{u}, \vec{v}| = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -75$$

su módulo 75 es el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores \overline{AB}, \vec{u} y \vec{v} .

2) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |5\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 10\vec{e}_3| = \sqrt{5^2 + 5^2 + 10^2} = \sqrt{150}$ y representa el área del paralelogramo determinado por los vectores \vec{u} y \vec{v} .

3) El cociente pedido tiene por valor $\frac{75}{\sqrt{150}} = 5\frac{\sqrt{3}}{2}$ y como es el volumen dividido por el área de la base representa la distancia entre las rectas r y s.

8

Halla la perpendicular común a las rectas $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$ y $\begin{cases} -x + 2y + z - 1 = 0 \\ x + y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$.

Solución:

Hay que obtener un plano que contenga a la primera y sea perpendicular a ambas y otro plano que contenga a la segunda recta y también sea perpendicular a ambas.

Las rectas en paramétricas son: $\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t \\ z = 3t \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{-5 - 5z}{3} \\ y = \frac{-1 - 4z}{3} \\ z = z \end{cases}$

Un vector perpendicular a ambas es: $(2, -4, 3) \times (-5, -4, 3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -4 & 3 \\ -5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = (0, -21, -28)$

Se puede tomar también el vector (0, 3, 4) por ser proporcional.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -25x - 8y + 6z = 0$$

$$\begin{vmatrix} x + \frac{5}{3} & y + \frac{1}{3} & z \\ -5 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -25\left(x + \frac{5}{3}\right) + 20\left(y + \frac{1}{3}\right) - 15z = -25x + 20y - 15z - 35 = 0$$

La perpendicular común es: $\begin{cases} -25x - 8y + 6z = 0 \\ -5x + 4y - 3z - 7 = 0 \end{cases}$

9 Hallar la recta perpendicular común a las rectas r: $x = y = z$; s: $x - 1 = y/3 = z$

Solución:

Escribamos las ecuaciones paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = m \\ y = m \\ z = m \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} x = 1+n \\ y = 3n \\ z = n \end{cases}$$

Si a y b son, respectivamente, los valores de m y n que nos dan los puntos P y Q , intersección de la perpendicular común con r y s , o sea $P(a, a, a)$ y $Q(1+b, 3b, b)$, el vector:

$$\vec{PQ} = (1+b-a, 3b-a, b-a)$$

es perpendicular a las rectas r y s .

Como el vector $u = (1, 1, 1)$ es paralelo a la recta r y el vector $v = (1, 3, 1)$ es paralelo a s , el vector \vec{PQ} es perpendicular a u y v , luego los productos escalares $u \cdot \vec{PQ}$ y $v \cdot \vec{PQ}$ son nulos:

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{PQ} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{PQ} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot (1+b-a) + 1 \cdot (3b-a) + 1 \cdot (b-a) = 0 \\ 1 \cdot (1+b-a) + 3 \cdot (3b-a) + 1 \cdot (b-a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en las coordenadas de P y Q obtenemos:

$$P\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) \quad y \quad Q\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

La recta pedida es la que pasa por ambos puntos:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t \\ y = \frac{3}{4} \\ z = \frac{3}{4} - t \end{cases}$$

10

Obtén los puntos P de $r: \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{-1}$ y Q de $s: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = z+1$ que verifican que $d(P, Q) = d(r, s)$ sin hallar la perpendicular común a r y s .

Solución:

$$P_r(1+2t, t, -1-t), P_s(-2-w, 1+2w, -1+w) \Rightarrow \vec{P_r P_s} = (-w-2t-3, 2w-t+1, w+t)$$

Como este vector debe ser perpendicular a las dos rectas, entonces:

$$\begin{cases} (-w-2t-3, 2w-t+1, w+t) \cdot (2, 1, -1) = -6t-w-5=0 \\ (-w-2t-3, 2w-t+1, w+t) \cdot (-1, 2, 1) = t+6w+5=0 \end{cases}$$

y resolviendo el sistema se obtiene $t = w = -\frac{5}{7}$, de donde:

$$P_r\left(-\frac{3}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{2}{7}\right), P_s\left(-\frac{9}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{12}{7}\right)$$