Problema 1 *(5 puntos).* Sean las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 2 \\ x - y = 1 \end{array} \right. \quad , \quad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 \end{array} \right. ,$$

se pide:

a) Estudiar la posición de ambas rectas.

b) La distancia que las separa.

c) Encontrar una recta vertical a ambas que pase por el punto $P(1, 1, -1)$

d) Encontrar una recta vertical a ambas y que las corte.

e) Encontrar una recta que pasando por el punto $P(1, 1, -1)$ corte a ambas.

f) Encontrar los puntos de r que distan 5 unidades de P.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 3) \\ P_r(1, 0, -1) \end{array} \right. , \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1, 2, 0) \\ P_s(1, 0, 3) \end{array} \right. , \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (0, 0, 4)$$

a)

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right] = \left| \begin{array}{rrr} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{array} \right| = 12 \neq 0 \Longrightarrow \text{se cruzan}$$

b)

$$|\overrightarrow{u_t}| = |\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |\left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{array} \right|| = | - 3(2, 1, -1)| = 3\sqrt{6}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{12}{3\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \ u$$

c)

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (2, 1, -1) \\ P(1, 1, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{array} \right.$$

d)

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (2,1,-1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,3) \\ P_r(1,0,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 3 & z+1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 4x{-}7y{+}z{-}3 = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (2,1,-1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,2,0) \\ P_s(1,0,3) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2 : \left| \begin{array}{ccc} 2 & -1 & x-1 \\ 1 & 2 & y \\ -1 & 0 & z-3 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 2x{+}y{+}5z{+}17 = 0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} 4x - 7y + z - 3 = 0 \\ 2x + y + 5z + 17 = 0 \end{array} \right.$$

e)

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_rP} = (0,1,0) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,1,3) \\ P_r(1,0,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 3 & z+1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 3x{-}z{-}4 = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_sP} = (0,1,-4) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,2,0) \\ P_s(1,0,3) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2 : \left| \begin{array}{ccc} 0 & -1 & x-1 \\ 1 & 2 & y \\ -4 & 0 & z-3 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 8x{-}4y{-}z{-}5 = 0$$

$$l : \left\{ \begin{array}{l} 3x - z - 4 = 0 \\ 8x - 4y - z - 5 = 0 \end{array} \right.$$

f)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{array} \right. , \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 25$$

$$(\lambda)^2 + (\lambda - 1)^2 + (3\lambda)^2 = 25 \Longrightarrow 11\lambda^2 - 2\lambda - 24 = 0 \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -1,39 \Longrightarrow P_1(-0,39; -1,39; -5,17) \\ \lambda_2 = 1,57 \Longrightarrow P_2(2,57; 1,57; 3,71) \end{array} \right.$$

Problema 2 *(2 puntos).* Se pide:

a) Dados los puntos $P_1(1,-1,5)$ y $P_2(3,1,3)$ encontrar el plano mediador.

b) Dados los planos $\pi_1 : x + 2y - 3z + 1 = 0$ y $\pi_2 : 3x - 2y - z + 2 = 0$ encontrar los planos bisectores.

Solución:

a)

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-5)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2}\Longrightarrow$$

$$\pi: x+y-z+2=0$$

b)

$$\frac{|x+2y-3z+1|}{\sqrt{14}}=\frac{|3x-2y-z+2|}{\sqrt{14}}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\pi: 2x-4y+2z+1=0\\ \pi': 4x-4z+3=0\end{array}\right.$$

Problema 3 *(3 puntos).* Dada la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2-2x-6y-6z+2=0$ se pide:

a) Calcular su centro y radio.

b) Encontrar la ecuación de la figura geométrica resultante de cortar esta esfera con el plano $z=2$.

c) Calcular la ecuación del plano tangente a esta esfera en el punto $P(4,1,1)$.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{l}m=-2a=-2\Longrightarrow a=1\\ n=-2b=-6\Longrightarrow b=3\\ p=-2c=6\Longrightarrow c=3\\ 2=1+9+9-r^2\end{array}\right.\Longrightarrow C(1,3,3),\quad r=\sqrt{17}$$

b) $x^2+y^2-2x-6y-6=0$ Se trata de un disco circular paralelo al plano $z=0$ de centro en el punto $C'(1,3,2)$ y radio: $-6=1+9-r'^2\Longrightarrow r'=\sqrt{16}=4$

c)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{CP}=(3,-2,-2)\\ P(4,1,1)\end{array}\right.\Longrightarrow 3x-2y-2z+\lambda=0\Longrightarrow 12-2-2+\lambda=0\Longrightarrow$$

$$\lambda=-8\Longrightarrow\pi: 3x-2y-2z-8=0$$