Problema 1 Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (3, m, -2)$, $\overrightarrow{v} = (m, 2, 1)$ y $\overrightarrow{w} = (m, -3, -4)$. Calcular m de forma que los vectores sean linealmente dependientes.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 3 & m & -2 \\ m & 2 & 1 \\ m & -3 & -4 \end{vmatrix} = 5(m^2 + 2m - 3) = 0 \Longrightarrow m = 1,\ m = -3$$

Si $m = 1$ o $m = -3$ los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente dependientes.

Problema 2 Se pide:

1. Calcular m para que los vectores $\overrightarrow{u} = (m, -5, 3)$ y $\overrightarrow{v} = (2m, m, 1)$ sean perpendiculares.
2. Encontrar un vector perpendicular $\overrightarrow{u} = (1, 3, 1)$ y a $\overrightarrow{v} = (-1, 5, 0)$ que tenga módulo 3.
3. Decidir si los vectores $\overrightarrow{u} = (5, -1, 1)$ y $\overrightarrow{v} = (1, 3, -2)$ son perpendiculares.

Solución:

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 2m^2 - 5m + 3 = 0 \Longrightarrow m = 1$ y $m = 3/2$
2. $$\overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-5, -1, 8) \Longrightarrow |\overrightarrow{w}| = 3\sqrt{10}$$
$$\overrightarrow{t} = \frac{3}{3\sqrt{10}}(-5, -1, 8) = \left(\frac{-\sqrt{10}}{2}, \frac{-\sqrt{10}}{10}, \frac{4\sqrt{10}}{5} \right)$$
3. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 5 - 3 - 2 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$

Problema 3 Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (1, -2, 1)$, $\overrightarrow{v} = (3, 0, 1)$ y $\overrightarrow{w} = (0, -1, 3)$. Calcular:

1. Volumen de paralelepípedo que determinan.

2. Área de la base determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del paralelogramo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.

3. Altura del paralelepípedo.

4. Volumen del tetraedro que determinan.

5. Área de la base del tetraedro determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del triángulo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.

6. Altura del tetredro.

Solución:

1.
$$V_p = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 16\ u^3$$

2.
$$S_p = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}| = |(-2, 2, 6)| = 2\sqrt{11}\ u^2$$
$$S_p = |\overrightarrow{v}| \cdot h_p \Longrightarrow h_p = 2\sqrt{\frac{11}{10}}\ u$$

3.
$$V_p = S_p \cdot H_p \Longrightarrow H_p = \frac{8\sqrt{11}}{11}\ u$$

4.
$$V_t = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}\ u^3$$

5.
$$S_t = \frac{2\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11}\ u^3,\ \ h_t = h_p = \sqrt{\frac{11}{10}}\ u$$

6.
$$H_t = H_p = \frac{8\sqrt{11}}{11}\ u$$

Problema 4 Sean los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(4, -2, -3)$ y $C(7, 2, 5)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

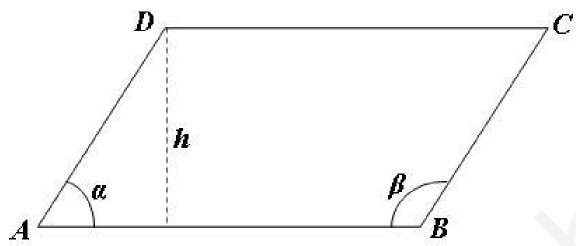
1. Encontrar el 4º vértice D.

2. Calcular la longitud de sus lados.

3. Calcular sus ángulos y su centro.

4. Calcular el punto simétrico de A respecto de C.
5. Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres partes iguales.

Solución



1. $D = A + \overrightarrow{BC} = (1,0,1) + (3,4,8) = (4,4,9)$.
2. $|\overrightarrow{AB}| = |(3,-2,-4)| = \sqrt{29}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(3,4,8)| = \sqrt{89}$
3. $$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|} = \frac{-31}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{89}} \Longrightarrow \alpha = 127^{\text{o}}36'13'' \text{ y } \beta = 52^{\text{o}}23'47''$$

   El centro es $M(4,1,3)$
4. $C = \dfrac{A+A'}{2} \Longrightarrow A' = 2C - A = (13,4,9)$
5. $$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \left(2, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$
   $$A_1 = A + \overrightarrow{u} = (1,0,1) + \left(2, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(3, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$$
   $$A_2 = A_1 + \overrightarrow{u} = \left(3, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right) + \left(2, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(5, \frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)$$
   $$C = A_3 = A_2 + \overrightarrow{u} = \left(5, \frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right) + \left(2, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = (7,2,5)$$