Problema 1 *(2 puntos)*Halla X tal que $AX + B = 0$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX + B = 0 \Longrightarrow AX = -B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(-B) \Longrightarrow X = A^{-1}(-B)$$

Tenemos que calcular A^{-1} y multiplicar este resultado por $-B$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2 puntos)*Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Encuentra los valores de a para los que la matriz no es inversible.
2. Calcula A^{-1} para $a = 2$

Solución:

1. Para que A tenga inversa su determinante tiene que ser distinto de cero, hacemos $|A| = (a-1)(3a-2) = 0$. Es decir, la matriz A tiene inversa siempre que $a \neq 1$ y $a \neq \dfrac{2}{3}$.
2. Para $a = 2$ tendremos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & -1/4 \\ -1/2 & -1 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(2 puntos)*Calcula el valor de este determinante, dando el resultado factorizado:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \longrightarrow C_1 - aC_2 \\ C_4 \longrightarrow C_4 - C_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & a & 1 & -a \\ -a & 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1-a^2 & 1 & -a \\ -a & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1-a^2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (F_1 \longrightarrow F_1 + F_3) =$$

$$= a\begin{vmatrix} 2-a^2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2\begin{vmatrix} 2-a^2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = a^2(a^2-4)$$

Problema 4 *(4 puntos)*Determina el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & -3 & 0 \\ 4 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Como la matriz tiene tres filas $Rango(A) \leq 3$, además se observa que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) \geq 2$.

Los determinantes que se pueden formar y los valores de t que los anulan son los siguientes:

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 4a + 3 = 0 \Longrightarrow a = -3, \ a = -1$$

2. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & a & 0 \end{vmatrix} = 0$$

4.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ a & -3 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = 0$$

En conclusión:

Si $a = -3$ o $a = -1$ los cuatro determinantes son cero $\Longrightarrow Rango(M) = 2$.

Si $a \neq -3$ y $a \neq -1$ alguno de los cuatro determinantes es distinto de cero y, por tanto, $Rango(M) = 3$.