

Problema 1 (4 puntos) Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 2x + ay + 6z = a - 2 \end{cases}$$

1. Discute el sistema según los valores de a .
2. Resolver el sistema para $a = 2$.

Solución

1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 6 & 0 \\ 2 & a & 4 & 2 \\ 2 & a & 6 & a - 2 \end{array} \right)$$

$$|A| = 2a^2 - 8 = 0 \implies a = 2 \quad a = -2$$

Si $a \neq 2$ y $a \neq -2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas, y en este caso se trata de un sistema Compatible Determinado.

Si $a = -2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \end{array} \right)$$

Sabemos en este caso que $|A| = 0$, y buscando menores, encontramos

$$\text{que } \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2.$$

$$\text{Mientras que por otro lado tenemos que } \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -128 \neq$$

$$0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3.$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A})$, en este caso el sistema sería Incompatible.

Si $a = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

Como la primera fila y la tercera son iguales, y además $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies$

Tenemos que $\text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\bar{A}) < n^\circ$ de incógnitas, luego en este caso se trata de un sistema Compatible Indeterminado.

2. Por el menor elegido en el apartado anterior podemos eliminar la tercera ecuación, después de hacer la sustitución $a = 2$, y nos queda:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 6z = 0 \\ 2x + 2y + 4z = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases}$$

Problema 2 (3 puntos) Un almacenista dispone de tres tipos de café: el A , a 980 ptas/kg; el B , a 875 ptas/kg; y el C , a 950 ptas/kg.

Desea hacer una mezcla con los tres tipos de café, para suministrar un pedido de 1050 kg a un precio de 940 ptas/kg.

¿Cuántos kilos de cada tipo de café debe de mezclar, sabiendo que debe poner del tercer tipo el doble de lo que ponga al primero y del segundo juntos?.

Solución:

Sea x la cantidad de café de tipo A .

Sea y la cantidad de café de tipo B .

Sea z la cantidad de café de tipo C .

$$\begin{cases} x + y + z = 1050 \\ z = 2(x + y) \\ 980x + 875y + 950z = 987000 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y + z = 1050 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ 980x + 875y + 950z = 987000 \end{cases}$$

Sistema que tiene por solución:

$$x = 400, \quad y = 300, \quad z = 350$$

Problema 3 (3 puntos) Resuelve la ecuación matricial $AX - B + C = 0$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AX - B + C = 0 \implies AX = B - C \implies A^{-1}AX = A^{-1}(B - C) \implies$$

$$X = A^{-1}(B - C)$$

$$B - C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(\text{Adj}(A))^T}{|A|} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$$