

Problema 1 (3 puntos) Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calcular A^{-1}
2. Resolver la ecuación matricial $AX = BA$.

Solución

$$1. \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad AX = BA \implies A^{-1}AX = A^{-1}BA \implies IX = A^{-1}BA \implies X = A^{-1}BA \text{ Por tanto:}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 2 (3 puntos) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para cada número real λ definimos $B = A - \lambda I$, donde I denota la matriz identidad 2×2 .

1. Hallar los valores de λ que hacen que el determinante de B sea nulo.
2. Resolver el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para los diferentes valores de λ .

Solución:

$$1. B = A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|B| = 0 \implies (2-\lambda) \cdot (-2-\lambda) - (-3) = 0 \implies \lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda = \pm 1$$

$$2. \text{ Si } \lambda = 1 : B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \implies \text{rango}(B) = 1 \text{ El sistema sería compatible indeterminado.}$$

$$x - 3y = 0 \implies x = 3y \text{ Las soluciones serían de la forma: } \begin{cases} x = 3t \\ y = t \end{cases}$$

$$3. \text{ Si } \lambda = -1 : B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \implies \text{rango}(B) = 1 \text{ El sistema sería compatible indeterminado.}$$

$$3x - 3y = 0 \implies x = y \text{ Las soluciones serían de la forma: } \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$$

Problema 3 (4 puntos) *Discutir según el valor del parámetro real a el sistema lineal*

$$\begin{cases} ax + 7y + 20z = 1 \\ ax + 8y + 23z = 1 \\ x - az = 1 \end{cases}$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 7 & 20 \\ a & 8 & 23 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 7 & 20 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 21 - 20 = 1 - a^2$$

$$|A| = 0 \implies a = \pm 1$$

- Si $a \neq \pm 1 \implies \text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(\overline{A}) \implies$ Sistema compatible determinado.

- Para $a = -1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 20 & 1 \\ -1 & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \implies \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 21 & 2 \end{array} \right) \implies$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

$$\bullet \text{ Para } a = 1 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -21 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Compatible indeterminado.}$$

Soluciones para $a = 1$: $z = t$, $y = -3t$, $x = 1 - 7 \cdot (-3t) - 20t = 1 + t$.

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}$$