Problema 1 *(4 puntos)*Discutir según el valor del parámetro real a el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & ay+ & z = & 1 \\ 3x- & y+ & z = & a \\ x+ & y+ & 2z = & 0 \end{array}\right.$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -a & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$.

Comparamos rangos, y para ello calculamos los valores para los que se anula el determinante de A:

$$\begin{vmatrix} 3 & -a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5a - 5 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

- Si $a \neq 1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$Sistema compatible determinado.
- Para $a = 1:\ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$

  Observamos que la primera y la segunda fila son iguales y además hay un menor $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ y por tanto, el Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & y+ & z = & 1 \\ x+ & y+ & 2z = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x = & \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4}\lambda \\ \\ y = & -\dfrac{1}{4} - \dfrac{5}{4}\lambda \\ \\ z = & \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)*Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ k & 1 & k \\ 0 & -k & -1 \end{pmatrix}$$

1. Halla los valores de k para los que la matriz A tiene inversa.
2. Calcular A^{-1} para $k = 1$.

Solución

1. Calculamos $|A| = 2k^2 - k - 3 = 0 \Longrightarrow k = \dfrac{3}{2},\ \ k = -1$. Luego A tendrá inversa siempre que k distinto de cualquiera de los valores anteriores.
2. Sustituimos $k = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \\ 1/2 & -3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(3 puntos)*Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolver la ecuación matricial $AX - A = B - C$.

Solución:

$$AX - A = B - C \Longrightarrow A(X - I) = B - C \Longrightarrow X - I = A^{-1}(B - C) \Longrightarrow$$
$$X = A^{-1}(B - C) + I$$

Tenemos que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, luego

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$