En este examen puedes escoger los tres problemas que quieras, pero debes de tener en cuenta la puntuación de cada uno de ellos.

Problema 1 *(4 puntos)* Discutir según el valor del parámetro real a el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rrrr} ax+ & y+ & z= & 2 \\ x+ & y+ & az= & 2 \\ -ax & & -z= & -a \end{array}\right.$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

Sea la matriz $A=\left(\begin{array}{rrr} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -a & 0 & -1 \end{array}\right)$

y la matriz ampliada $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 2 \\ -a & 0 & -1 & -a \end{array}\right)$.

Comparamos rangos, y para ello calculamos los valores para los que se anula el determinante de A:

$$\left|\begin{array}{rrr} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ -a & 0 & -1 \end{array}\right| = 1-a^2=0 \Longrightarrow a=\pm 1$$

- Si $a\neq \pm 1 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$Sistema compatible determinado.
- Para $a=-1:\ A=\left(\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$ y $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

  Tenemos que $|A|=0$ y además hay un menor $\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right| = -1\neq 0$ y por tanto, el Rango$(A)=2$.

  Ahora estudiamos el rango de $\overline{A}$, y nos damos cuenta de que hay un menor de orden 3 y distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ y el Rango}(\overline{A}) = 3.$$

Concluyendo:
Rango$(A) = 2 \neq$ Rango$(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ El sistema es Incompatible.

- Para $a = 1:\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$

  Sabemos que $|A| = 0$, luego tenemos que buscar menores, y encontramos el siguiente:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2.$$

  En la matriz ampliada $\overline{A}$ vemos que tiene dos filas iguales, y por tanto, no puede tener rango tres. Buscando menores de orden dos y nos encontramos con el mismo de la matriz A.

  Como conclusión podemos afirmar que Rango$(A) = 2 =$Rango$\overline{A}$ <n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

  Vamos a resolverlo:

  Por el menor de orden dos que estudiamos en la matriz A podemos despreciar la primera de las ecuaciones, pues sería combinación lineal de las dos primeras. Y nos quedaría el siguiente sistema.

  $$\left\{\begin{array}{rrrr} x & +y+ & z = & 2 \\ -x & - & z = & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 2 \\ x & + & z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

  $$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y = & 2 & -z \\ x & = & 1 & -z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x = & 1-\lambda \\ y = & 1 \\ z = & \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \ B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Halla los valores de k para los que la matriz $A \cdot B$ tiene inversa.

2. Halla los valores de k para los que la matriz $B \cdot A$ tiene inversa.

Solución

1. Primero calculamos el producto de $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Ahora calculamos el determinanate:

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 3k & k & -2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k^2 - 3k - (-k + k(-2+2k)) = 0$$

   Independientemente del valor de k, luego $A \cdot B$ no tiene inversa, sea cual sea el valor de k.

2. Primero calculamos el producto de $B \cdot A$:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$$

   Ahora calculamos el determinanate:

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} k & -1 \\ 3 & k+2 \end{vmatrix} = k^2 + 2k + 3$$

   Esta expresión no se anula nunca, luego siempre existirá inversa de $B \cdot A$, sea cual sea el valor de k.

Problema 3 *(3 puntos)* Sea M una matriz real cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n. Se pide:

1. Estudiar si existe la matriz inversa de M. En caso afirmativo, expresa M^{-1} en términos de M e I.

2. Expresar M^3 como combinación lineal de M e I.

3. Hallar todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.

Solución:

1. Tenemos $M^2 - 2M = 3I \Longrightarrow (M-2I)M = 3I \Longrightarrow \frac{1}{3}(M-2I)M = I \Longrightarrow M^{-1} = \frac{1}{3}(M-2I)$

2. Tenemos $M^2 - 2M = 3I \Longrightarrow M^2 = 3I + 2M$
   Por otra parte $M^3 = M^2 \cdot M = (3I+2M)M = 3I \cdot M + 2M^2$, si volvemos a sustituir M^2 nos queda:
   $$M^3 = 3I \cdot M + 2(3I+2M) = 3M + 6I + 4M = 7M + 6I$$

3. Primero calculamos M^2:
   $$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$
   Sustituimos en la expresión:
   $$M^2 - 2M = 3I \Longrightarrow \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   $$\begin{pmatrix} a^2+b^2-2a & 2ab-2b \\ 2ab-2b & a^2+b^2-2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a^2+b^2-2a & = 3 \\ 2b(a-1) & = 0 \end{array} \right.$$
   Si $b = 0$ en la segunda ecuación, al sustituir este resultado en la primera obtendremos dos valores de a, que serían los resultados de la ecuación $a^2 - 2a - 3 = 0$, es decir, $a = 3$ y $a = -1$. Las matrices M obtenidas serían:
   $$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   Si $a = 1$ en la segunda ecuación, al sustituir este resultado en la primera obtendremos dos valores de b, que serían los resultados de la ecuación $b^2 = 4$, es decir, $b = 2$ y $b = -2$. Las matrices M obtenidas serían:
   $$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(3 puntos)* Cuatro colegiales llamados Luis, Javier, Enrique y Fermín se juntan en el recreo para intercambiar cromos. Fermín tiene cinco cromos más que Luis y Javier juntos, Enrique tiene el doble de cromos que Javier, y Javier tiene 90 cromos menos que Fermín y Enrique juntos. Calcula los cromos que tienen entre los cuatro.

Solución:
Sea x los cromos de Luis, y los cromos de Javier, z los cromos de Enrique,

y h los cromos de Fermín.

$$\left\{\begin{array}{l} h=5+x+y \\ z=2y \\ y+90=h+z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrr} x+ & y & & -h= & -5 \\ & 2y- & z & = & 0 \\ & y- & z & -h= & -90 \end{array}\right.$$

Multiplicamos la 3ª ecuación por -2 y la sumamos a la 2ª nos queda

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x+ & y & & -h= & -5 \\ & 2y- & z & = & 0 \\ - & 2y+ & 2z & +2h= & 180 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrr} x+ & y & & -h= & -5 \\ & 2y- & z & = & 0 \\ & & z & +2h= & 180 \end{array}\right.$$

Y si ahora sumamos la primera y la tercera nos queda $x+y+z+h=175$ que es lo que nos pedía el problema.