Problema 1 *(3 puntos) Sean las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \;\; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *Calcular A^{-1}*

2. *Resolver la ecuación matricial $AX = BA$.*

Solución

1. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $AX = BA \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}BA \Longrightarrow IX = A^{-1}BA \Longrightarrow X = A^{-1}BA$ Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(3 puntos)* Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para cada número real λ definimos $B = A - \lambda I$, donde I denota la matriz identidad 2×2.

1. Hallar los valores de λ que hacen que el determinante de B sea nulo.

2. Resolver el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para los diferentes valores de λ.

Solución:

1. $B = A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$

   $|B| = 0 \Longrightarrow (2-\lambda)\cdot(-2-\lambda) - (-3) = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$

2. Si $\lambda = 1 : B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow rango(B) = 1$ El sistema sería compatible indeterminado.

   $x - 3y = 0 \Longrightarrow x = 3y$ Las soluciones serían de la forma: $\left\{ \begin{array}{rr} \text{x=} & \text{3t} \\ \text{y=} & \text{t} \end{array} \right.$

3. Si $\lambda = -1 : B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow rango(B) = 1$ El sistema sería compatible indeterminado.

   $3x - 3y = 0 \Longrightarrow x = y$ Las soluciones serían de la forma: $\left\{ \begin{array}{ll} \text{x=} & \text{t} \\ \text{y=} & \text{t} \end{array} \right.$

Problema 3 *(4 puntos) Discutir según el valor del parámetro real a el sistema lineal*

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} ax+ & 7y+ & 20z= & 1 \\ ax+ & 8y+ & 23z= & 1 \\ x- & & az= & 1 \end{array} \right.$$

y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones.

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} \text{a} & 7 & 20 \\ \text{a} & 8 & 23 \\ 1 & 0 & \text{-a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{a} & 7 & 20 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & \text{-a} \end{vmatrix} = -a^2 + 21 - 20 = 1 - a^2$$

$|A| = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$

- Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow rango(A) = 3 = rango(\overline{A})$ $\Longrightarrow$Sistema compatible determinado.
- Para $a = -1$: $\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 7 & 20 & 1 \\ -1 & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 21 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

- Para $a = 1$: $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -21 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 7 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Compatible indeterminado.}$$

Soluciones para $a = 1$: $z = t$, $y = -3t$, $x = 1 - 7 \cdot (-3t) - 20t = 1 + t$.

$$\left\{ \begin{array}{rl} \text{x=} & \text{1+t} \\ \text{y=} & \text{-3t} \\ \text{z=} & \text{t} \end{array} \right.$$