

Problema 1 (6 puntos). Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m dando una interpretación geométrica:

$$\begin{cases} mx - my + 2z = 3 \\ 2x + my = m + 1 \\ 4x + 5y - 4z = m - 1 \end{cases}$$

y resuélvelo para $m = 1$ y $m = 0$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & -m & 2 & 3 \\ 2 & m & 0 & m+1 \\ 4 & 5 & -4 & m-1 \end{array} \right), \quad |A| = -4(m^2 + 4m - 5) = 0 \implies m = 1, \quad m = -5$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -5 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Determinado.

Los tres planos se cortan en un punto.

Si $m = -5$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & -4 \\ 4 & 5 & -4 & -6 \end{array} \right)$$

En este caso $\text{Rango}(A) = 2$ y como $\begin{vmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & -4 \\ 4 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -180 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \implies$ Sistema Incompatible.

Los tres planos se cortan dos a dos.

2. Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

En este caso $\text{Rango}(A) = 2$ y como:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Tenemos $\text{Rango}(\overline{A}) = 2 = \text{Rango}(A) < \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \implies \text{Sistema Compatible Indeterminado}$.

Los tres planos se cortan en una recta.

3. ■ Si $m = 1$: El sistema es compatible indeterminado y no tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5/3 - (2/3)\lambda \\ y = -4/3 + (4/3)\lambda \end{cases}$$

- Si $m = 0$:

$$\begin{cases} 2z = 3 \\ 2x = 1 \\ 4x + 5y - 4z = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 3/5 \\ z = 3/2 \end{cases}$$

Problema 2 (2 puntos). Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Indica los valores de m para los que A es invertible.
- Resuelva la ecuación matricial $XA - B^T = C$ para $m = 0$. (B^T es la matriz traspuesta de B)

(Andalucía (junio 2010))

Solución:

1. $|A| = -m^2 + 4m - 3 = 0 \implies m = 1 \text{ y } m = 3$

Si $m \neq 1$ y $m \neq 3 \implies \exists A^{-1}$.

Si $m = 1$ y $m = 3 \implies$ no existe A^{-1}

2. $XA - B^T = C \implies X = (C + B^T)A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3 (2 puntos). Dadas las matrices cuadradas

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

se pide:

1. Calcular las matrices $(A - I)^2$ y $A(A - 2I)$
2. Justificar razonadamente que:
 - a) Existen las inversas de las matrices A y $A - 2I$.
 - b) No existe matriz inversa de la matriz $A - I$.
3. Determinar el valor del parámetro real λ para el que se verifica $A^{-1} = \lambda(A - 2I)$.

(Comunidad Valenciana (junio 2011))

Solución:

1.

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad (A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A(A - 2I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. a)

$$|A| = 1 \neq 0 \implies \exists A^{-1}$$

$$|A - 2I| = -1 \neq 0 \implies \exists (A - 2I)^{-1}$$

b)

$$|A - I| = 0 \implies \text{no existe } A^{-1}$$

3.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix} \implies \lambda = -1$$

Problema 4 (2 puntos).

1. Calcula las matrices X que cumplen $AX = XA$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Resuelve la ecuación matricial $AX - B = I - CX$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

- 1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & b \\ 2c+d & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a = 2a + b \Rightarrow b = 0 \\ 2b = b \Rightarrow b = 0 \\ a + c = 2c + d \Rightarrow a = c + d \\ b + d = d \Rightarrow b = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

2. $AX - B = I - CX \Rightarrow x = (A + C)^{-1}(I + B)$

$$(A + C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/13 & 2/13 \\ 3/13 & -7/13 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 6/13 & 6/13 \\ -8/13 & -21/13 \end{pmatrix}$$