Problema 1 Tres nadadores de diferentes edades se encuentran en la piscina y el entrenador les comenta que hace cinco años el mayor de ellos tenía el doble de la edad de los otros dos juntos y que dentro de cinco años tendrá la suma de sus edades. El mediano le dice al pequeño que le saca dos años. Calcular las edades de los tres.

Solución:

Sea x los años del pequeño, sea y los años del mediano y sea z los años del mayor.

Hace 5 años: El pequeño tiene $x-5$ años, el mediano tiene $y-5$ años y el mayor $z-5$ años.

Dentro de 5 años: El pequeño tiene $x+5$ años, el mediano tiene $y+5$ años y el mayor $z+5$ años.

$$\left\{\begin{array}{l} 2(x+y-10)=z-5 \\ x+y+10=z+5 \\ y=x+2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & 2y- & z= & 15 \\ x+ & y- & z= & -5 \\ -x+ & y & = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=9 \\ y=11 \\ z=25 \end{array}\right.$$

Problema 2 Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z= & 2 \\ -2x+ & y+ & z= & -1 \\ (2-2m)x+ & & (2m-2)z= & m-1 \end{array}\right.$$

a) Discutirlo para los distintos valores de m.

b) Resuelve los casos compatibles.

c) En cada uno de los casos del primer apartado, dé una interpretación geométrica del sistema.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z= & 2 \\ -2x+ & y+ & z= & -1 \\ (2-2m)x+ & & (2m-2)z= & m-1 \end{array}\right.$$

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ 2-2m & 0 & 2m-2 \end{array}\right)\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 1 & -1\\ 2-2m & 0 & 2m-2 & m-1 \end{array}\right)$$

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ 2-2m & 0 & 2m-2 \end{array}\right|=4-4m$$

$$4-4m=0\Longrightarrow m=1$$

- Cuando $m\neq 1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$A$ =Rango$\overline{A}=3=$n$^{\text{o}}$ de incógnitas, luego en este caso el sistema es compatible determinado.
- Cuando $m=1\Longrightarrow |A|=0$, y como el menor $\left|\begin{array}{cc} 0 & 1\\ -2 & 1 \end{array}\right|=2\neq 0$ tenemos que Rango$(A)=2$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  En conclusión, cuando $m=1\Longrightarrow$ Rango$(A)=2=$Rango$(\overline{A})=2<$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas, luego en este caso el sistema es Compatible Indeterminado (infinitas soluciones).

b) Calculamos las soluciones:

- Cuando $m=1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z= & 2\\ -2x+ & y+ & z= & -1 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rrr} & y= & 2-z\\ -2x+ & y= & -1-z \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=3/2\\ y=2-\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

- Cuando $m\neq 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z= & 2\\ -2x+ & y+ & z= & -1\\ (2-2m)x+ & & -(2-2m)z= & -(1-m) \end{array}\right.\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z= & 2\\ -2x+ & y+ & z= & -1\\ 2x+ & & -2z= & -1 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=3/2\\ y=0\\ z=2 \end{array}\right.$$

c)
- Cuando $m\neq 1$ y $m\neq -1\Longrightarrow$ los tres planos se cortan en un punto
- Cuando $m=1\Longrightarrow$ dos planos coinciden y el otro les corta en una recta.

Problema 3 Utilizando las propiedades de los determinantes resolver las siguientes ecuaciones:

a)

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x = 0, \ x = -3$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$