Problema 1 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & 3z = & \alpha \\ 2x+ & 6y- & 11z = & 2 \\ x- & 2y+ & 7z = & 1 \end{array}\right.$$

a) Determinar razonadamente el valor de α para el cual el sistema es compatible.

b) Para el valor de α obtenido en el apartado anterior, calcular el conjunto de soluciones del sistema.

c) Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las tres ecuaciones del sistema, en función de los valores de α.

Comunidad Valenciana (Junio 2006)

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 2 & 6 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{array}\right), \quad |A| = 0$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$ (Siempre).

Como

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 10 - 10\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 1$$

Si $\alpha \neq 1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 \neq \text{Rango}(\overline{A}) =$ el Sistema es Incompatible.

Si $\alpha = 1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ el Sistema es Compatible Indeterminado.

b) Si $\alpha = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & 3z = & 1 \\ 2x+ & 6y- & 11z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 5/2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

c) Si $\alpha = 1$ los tres planos se cortan en una recta, y si $\alpha \neq 1$ los tres planos se cortan dos a dos sin puntos comunes.

Problema 2 En una boda se encuentran tres familiares: Pablo, Félix e Israel. Pablo les comenta a Félix e Israel, que hace 10 años tenía el doble de la suma de sus edades. Félix les dice que dentro de 10 años él tendrá la misma edad que ahora mismo tiene Israel. Calcular que edad tienen los tres familiares en este momento, sabiendo que en el día de hoy la suma de sus edades es de 90 años.

Mío (Noviembre 2007)

Solución:

x edad de Pablo.
y edad de Félix.
z edad de Israel.

$$\left\{\begin{array}{l} x - 10 = 2(y + z - 20) \\ y + 10 = z \\ x + y + z = 90 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 50 \\ y = 15 \\ z = 25 \end{array}\right.$$

Problema 3 Se pide:

a) Despeja la matriz X en función de A e I_2 en la ecuación

$$(X + A)^2 = X^2 + XA + I_2$$

siendo X y A matrices cuadradas de orden dos, e I_2 la matriz identidad de orden dos.

b) Resuelve la ecuación $BX + B^2 = I_2$, si $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e I_2 la matriz identidad de orden dos.

Castilla-La Mancha (Junio 2006)

Solución:

a)

$$(X+A)^2 = X^2+AX+I_2 \Longrightarrow X^2+AX+XA+A^2 = X^2+AX+I_2 \Longrightarrow$$
$$AX+A^2 = I_2 \Longrightarrow A(X+A) = I_2 \Longrightarrow A^{-1} = X+A \Longrightarrow X = A^{-1}-A$$

b)

$$BX+B^2 = I_2 \Longrightarrow B(X+B) = I_2 \Longrightarrow X+B = B^{-1} \Longrightarrow X = B^{-1}-B$$
$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$