Problema 1 (6 puntos). Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m dando una interpretación geométrica:

$$\begin{cases} mx - my + 2z = 3 \\ 2x + my = m + 1 \\ 4x + 5y - 4z = m - 1 \end{cases}$$

y resuélvelo para $m = 1$ y $m = 0$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & -m & 2 & 3 \\ 2 & m & 0 & m+1 \\ 4 & 5 & -4 & m-1 \end{array}\right), \quad |A| = -4(m^2+4m-5) = 0 \Longrightarrow m = 1, \; m = -5$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -5 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Los tres planos se cortan en un punto.

Si $m = -5$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & -4 \\ 4 & 5 & -4 & -6 \end{array}\right)$$

En este caso Rango$(A) = 2$ y como $\begin{vmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & -4 \\ 4 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -180 \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

Los tres planos se cortan dos a dos.

2. Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

En este caso Rango$(A) = 2$ y como:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Tenemos Rango($\overline{A}$) = 2 = Rango(A) < nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

Los tres planos se cortan en una recta.

3.
- Si $m = 1$: El sistema es compatible indeterminado y no tiene infinitas soluciones.

$$\left\{\begin{array}{c} x - y + 2z = 3 \\ 2x + y = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5/3 - (2/3)\lambda \\ y = -4/3 + (4/3)\lambda \end{array}\right.$$

- Si $m = 0$:

$$\left\{\begin{array}{c} 2z = 3 \\ 2x = 1 \\ 4x + 5y - 4z = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/2 \\ y = 3/5 \\ z = 3/2 \end{array}\right.$$

Problema 2 (2 puntos). Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Indica los valores de m para los que A es invertible.
2. Resuelva la ecuación matricial $XA - B^T = C$ para $m = 0$. (B^T es la matriz traspuesta de B)

(Andalucía (junio 2010))

Solución:

1. $|A| = -m^2 + 4m - 3 = 0 \Longrightarrow m = 1$ y $m = 3$

   Si $m \neq 1$ y $m \neq 3 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

   Si $m = 1$ y $m = 3 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}

2. $XA - B^T = C \Longrightarrow X = (C + B^T)A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 3 (2 puntos). Dadas las matrices cuadradas

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

se pide:

1. Calcular las matrices $(A-I)^2$ y $A(A-2I)$
2. Justuficar razonadamente que:
   a) Existen las inversas de las matrices A y $A-2I$.
   b) No existe matriz inversa de la matriz $A-I$.
3. Determinar el valor del parámetro real λ para el que se verifica $A^{-1} = \lambda(A-2I)$.

(Comunidad Valenciana (junio 2011))

Solución:

1.

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad (A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(A-2I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. *a*)

$$|A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists\, A^{-1}$$

$$|A-2I| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \exists\, (A-2I)^{-1}$$

b)

$$|A-I| = 0 \Longrightarrow \text{ no existe } A^{-1}$$

3.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \lambda = -1$$

Problema 4 (2 puntos).

1. Calcula las matrices X que cumplen $AX = XA$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Resuelve la ecuación matricial $AX - B = I - CX$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & b \\ 2c+d & d \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2a = 2a + b \Longrightarrow b = 0 \\ 2b = b \Longrightarrow b = 0 \\ a + c = 2c + d \Longrightarrow a = c + d \\ b + d = d \Longrightarrow b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

2. $AX - B = I - CX \Longrightarrow x = (A + C)^{-1}(I + B)$

$$(A+C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/13 & 2/13 \\ 3/13 & -7/13 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 6/13 & 6/13 \\ -8/13 & -21/13 \end{pmatrix}$$