Problema 1 Sea el sistema de ecuaciones:

$$S:\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & m\\ 2x+ & & 3z= & 2m+1\\ x+ & 3y+ & (m-2)z= & m-1\end{array}\right.$$

donde m es un parámetro real. Obtener razonadamente:

1. Todas las soluciones del sistema S cuando $m=2$.
2. Todos los valores de m para los que el sistema S tiene una solución única.
3. El valor de m para el que el sistema S admite la solución:

$$(x,y,z)=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)$$

(Comunidad Valenciana Junio 2011)

Solución:

1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & m\\ 2 & 0 & 3 & 2m+1\\ 1 & 3 & m-2 & m-1\end{array}\right);\quad |A|=-2m+4=0\Longrightarrow m=2$$

- Si $m\neq 2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=\text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 3 & 5\\ 1 & 3 & 0 & 1\end{array}\right);\ |A|=0,\ \left|\begin{array}{rr} 2 & 0\\ 1 & 3\end{array}\right|=6\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$$|A_1|=|A_2|=|A_3|=|A_4|=0\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=2$$

Luego Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ <N$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 2\\ 2x+ & & 3z= & 5\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=5/2-3/2\lambda\\ y=-1/2+1/2\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

2.
$$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+0=m \Longrightarrow m=1$$

Problema 2 Se pide:

1. Sin desarrollar el determinante, comprobar que:

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}=0$$

2. Determinar el rango del conjunto de vectores:

$$\{(1,-2,0,-3),(-1,3,1,4),(2,1,5,-1)\}$$

(Islas Baleares Junio 2011)

Solución:

1.
$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}=0$$

2.
$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix};\ |A_1|=|A_2|=|A_3|=|A_4|=0$$

$$A=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=5\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

Problema 3 Se pide:

1. Comprobar que si A es una matriz cuadrada tal que $A^2=2A-I$ donde I es la matriz identidad, entonces A es invertible. ¿Cuál es la expresión de A^{-1}?

2. Utilizar el apartado anterior para calcular la inversa de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

(Islas Baleares Junio 2011)

Solución:

1. $A^2 = 2A - I \Longrightarrow A^2 - 2A = I \Longrightarrow A(A-2I) = -I \Longrightarrow A^{-1} = 2I - A$

2. Primero hay que comprobar que la matriz A cumple que $A^2 = 2A - I$, y en efecto es así. Luego:

$$A^{-1} = 2I - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 4 Un cajero automático contiene 95 billete de 10, 20, y 50 euros, y un total almacenado de 2000 euros. Si el número total de billetes de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros, averiguar cuántos billetes de cada tipo hay.

(Zaragoza Junio 2007)

Solución

Sea x el n$^{\text{o}}$ de billetes de 10 euros, y el n$^{\text{o}}$ de billetes de 20 euros y z el n$^{\text{o}}$ de billetes de 50 euros.

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 95 \\ 10x + 20y + 50z = 2000 \\ x = 2y \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 50 \\ y = 25 \\ z = 20 \end{array} \right.$$