

Problema 1 (5 puntos). Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m :

$$\begin{cases} mx + 2y + z = -1 \\ 2x + my - z = m \\ 4x + 5y + z = m \end{cases}$$

y resuélvelo para $m = 1$ y $m = 0$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & 1 & -1 \\ 2 & m & -1 & m \\ 4 & 5 & 1 & m \end{array} \right), \quad |A| = m^2 + m - 2 = 0 \implies m = 1, \quad m = -2$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$ de incógnitas $\implies$ Sistema Compatible Determinado.

Los tres planos se cortan en un punto.

Si $m = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

En este caso $\text{Rango}(A) = 2$ y como $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -54 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \implies$ Sistema Incompatible.

Los tres planos se cortan dos a dos.

2. Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

En este caso $\text{Rango}(A) = 2$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \implies$ Sistema Incompatible.

3. ■ Si $m = 1$: El sistema es incompatible y no tiene solución.

- Si $m = 0$:

$$\begin{cases} 2y + z = -1 \\ 2x - z = 0 \\ 4x + 5y + z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5/2 \\ y = -3 \\ z = 5 \end{cases}$$

Problema 2 (3 puntos).

1. (1,5 puntos) Sean A, B, I las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiar si existe algún valor $\lambda \in \mathbb{R}$ para el cual se satisfaga:

$$(A - \lambda I)^2 = B$$

2. (1,5 puntos) Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$, determinar el

valor de $\begin{vmatrix} x & 1/4 & 4 \\ y & 0 & 4 \\ z & 1/2 & 12 \end{vmatrix}$

(Zaragoza (junio 2008))

Solución:

1. $(A - \lambda I)^2 = B$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad (A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 + 2 & -2\lambda + 1 & -2\lambda \\ -2\lambda + 1 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & 1 + \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 + 2 & -2\lambda + 1 & -2\lambda \\ -2\lambda + 1 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & 1 + \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \implies$$

$$\begin{cases} \lambda^2 + 2 = 6 \implies \lambda = \pm 2 \\ -2\lambda + 1 = -3 \implies \lambda = 2 \\ -2\lambda = -4 \implies \lambda = 2 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 2 \implies \lambda = 2, \lambda = 0 \\ 1 + \lambda^2 = 5 \implies \lambda = \pm 2 \end{cases}$$

La única solución común es $\lambda = 2$.

2.

$$\begin{vmatrix} x & 1/4 & 4 \\ y & 0 & 4 \\ z & 1/2 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1/4 & 0 & 1/2 \\ 4 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

Problema 3 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Calcula los valores de m para los que A tiene inversa.
2. (1 punto) Para $m = 1$, calcula la matriz que verifica $XA + X - 2A = 0$
(Galicia (junio 2008))

Solución:

$$1. |A| = m^2 - 2m = 0 \implies m = 0 \text{ y } m = 2$$

Si $m \neq 0 \implies |A| \neq 0 \implies A$ tiene inversa.

Si $m = 0 \implies |A| = 0 \implies A$ no tiene inversa.

2. Para $m = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad XA + X - 2A = 0 \implies X = 2A(A + I)^{-1}$$

$$A + I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \implies (A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = 2A(A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$