Problema 1 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Hallar dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$.
2. (1 punto) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.
3. (1 punto) Hallar todas las matrices X que satisfacen $(A-X)(A+X) = A^2 - X^2$.

Solución:

1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \; \alpha A + \beta I = \begin{pmatrix} -\alpha+\beta & 0 \\ \alpha & 2\alpha+\beta \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha+\beta = 1 \\ \alpha = 1 \\ 2\alpha+\beta = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \alpha = 1, \;\; \beta = 2$$

$$A^2 = A + 2I$$

2.

$$A^5 = A^2A^2A = (A+2I)^2A = (A^2+4I^2+4A)A = (A+2I+4A+4I)A =$$

$$(5A+6I)A = 5A^2 + 6A = 5(A+2I) + 6A = 11A10I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 11 & 32 \end{pmatrix}$$

3.

$$(A-X)(A+X) = A^2 - X^2 \Longrightarrow A^2 + AX - XA + X^2 = A^2 - X^2$$

$$\Longrightarrow AX - XA = 0 \Longrightarrow AX = XA$$

Serán todas aquellas matrices X que cumplan $AX = XA$.

Problema 2 Resolver la ecuación matricial $XA - C = X - B$. Donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$XA - C = X - B \Longrightarrow X(A - I) = C - B \Longrightarrow X = (C - B)(A - I)^{-1}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C - B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = (C - B)(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Calcular los valores de x para los que

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ x & x-1 & x-2 & x-1 \\ x & 1 & 0 & 1 \\ x & x & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & x-2 & x-1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_2 - \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{C}_3 \\ \mathrm{C}_4 - \mathrm{C}_1 \end{bmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & x-2 & x-2 & x-2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x-2 & x-2 & x-2 \\ x-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x(x-2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ x-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -x(x-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x-1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$x(x-1)(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 0, \ x = 1, \ x = 2$$

Problema 4 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3a & -1 & a & 0 \\ 4-a & -a & 1 & a-1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A para los diferentes valores de a.

Solución:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 3a & -1 & a \\ 4-a & -a & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (a-1)(4a+5) = 0 \Longrightarrow a = 1, \;\; a = -5/4$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 3a & -1 & 0 \\ 4-a & -a & a-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 - a = 0 \Longrightarrow a = 1$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 3a & a & 0 \\ 4-a & 1 & a-1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4a(a-1) = 0 \Longrightarrow$$

$$a = 0, \;\; a = 1$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} -1 & a & 0 \\ -a & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - a = 0 \Longrightarrow a = 1$$

El único valor que anula los cuatro determinantes es $a = 1$, luego si $a \neq 1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$. Y si $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.