Problema 1 (5 puntos). Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m:

$$\begin{cases} mx + 2y + z = -1 \\ 2x + my - z = m \\ 4x + 5y + z = m \end{cases}$$

y resuélvelo para $m = 1$ y $m = 0$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & 1 & -1 \\ 2 & m & -1 & m \\ 4 & 5 & 1 & m \end{array} \right), \quad |A| = m^2+m-2 = 0 \Longrightarrow m = 1, \ \ m = -2$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Los tres planos se cortan en un punto.

Si $m = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

En este caso Rango$(A) = 2$ y como $\left| \begin{array}{ccc} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \end{array} \right| = -54 \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

Los tres planos se cortan dos a dos.

2. Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

En este caso Rango$(A) = 2$ y como $\left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{array} \right| = -6 \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

3. - Si $m = 1$: El sistema es incompatible y no tiene solución.

- Si $m = 0$:

$$\left\{\begin{array}{c} 2y + z = -1 \\ 2x - z = 0 \\ 4x + 5y + z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5/2 \\ y = -3 \\ z = 5 \end{array}\right.$$

Problema 2 (3 puntos).

1. (1,5 puntos) Sean A, B, I las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Estudiar si existe algún valor $\lambda \in R$ para el cual se satisfaga:

$$(A - \lambda I)^2 = B$$

2. (1,5 puntos) Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$, determinar el valor de $\begin{vmatrix} x & 1/4 & 4 \\ y & 0 & 4 \\ z & 1/2 & 12 \end{vmatrix}$

(Zaragoza (junio 2008))

Solución:

1. $(A - \lambda I)^2 = B$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad (A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 + 2 & -2\lambda + 1 & -2\lambda \\ -2\lambda + 1 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & 1 + \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 + 2 & -2\lambda + 1 & -2\lambda \\ -2\lambda + 1 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 & 1 \\ -2\lambda & 1 & 1 + \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda^2 + 2 = 6 \Longrightarrow \lambda = \pm 2 \\ -2\lambda + 1 = -3 \Longrightarrow \lambda = 2 \\ -2\lambda = -4 \Longrightarrow \lambda = 2 \\ \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 2 \Longrightarrow \lambda = 2, \ \ \lambda = 0 \\ 1 + \lambda^2 = 5 \Longrightarrow \lambda = \pm 2 \end{array}\right.$$

   La única solución común es $\lambda = 2$.

2.

$$\begin{vmatrix} x & 1/4 & 4 \\ y & 0 & 4 \\ z & 1/2 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1/4 & 0 & 1/2 \\ 4 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

Problema 3 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Calcula los valores de m para los que A tiene inversa.
2. (1 punto) Para $m = 1$, calcula la matriz que verifica $XA + X - 2A = 0$

(Galicia (junio 2008))

Solución:

1. $|A| = m^2 - 2m = 0 \Longrightarrow m = 0$ y $m = 2$

   Si $m \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow A$ tiene inversa.

   Si $m = 0 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow A$ no tiene inversa.

2. Para $m = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; XA + X - 2A = 0 \Longrightarrow X = 2A(A+I)^{-1}$$

$$A + I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A+I)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = 2A(A+I)^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$